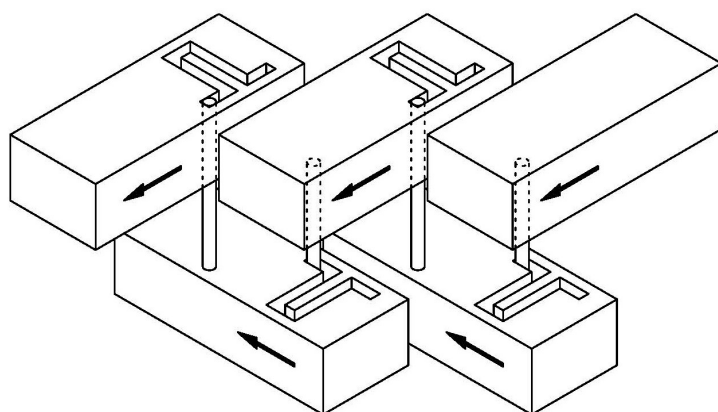


「水瓶座の引出」の手数はどう計算するか



改訂版

岩原宏志

「水瓶座の引出」の手数はどう計算するか

はじめに

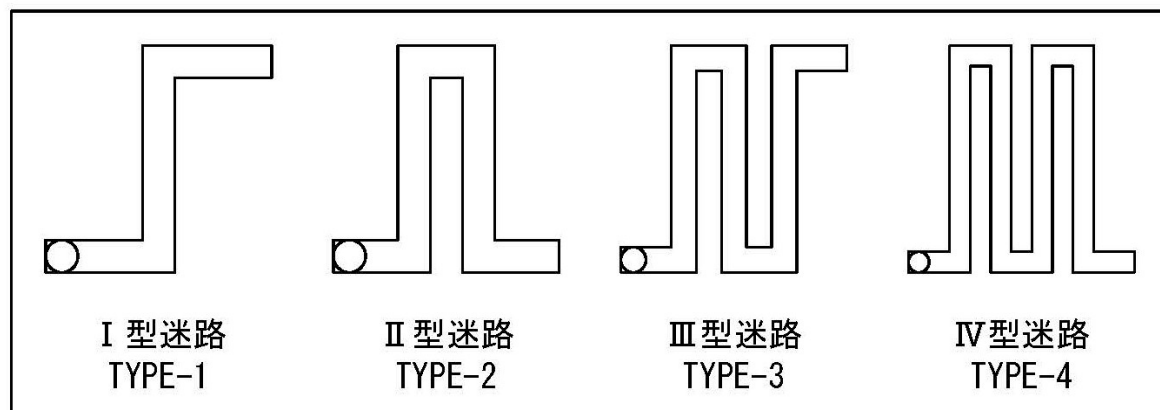
第1章 「水瓶座の引出」の仕組み 第1節 構造のイメージと各部の名称 第2節 引出と作品のゴールについて 第3節 実際の動きを平面図で見る 第4節 動きの大まかな流れを見る 第5節 作品の動きの全体を把握する	第2章 本稿で扱う2つの計算手法 第1節 計算の手法1（逆方向の計算） 隣り合う迷路の関係から計算する 第2節 計算の手法2（正方向の計算） 各仕掛の手数を合計して計算する
第3章 手法1の準備と計算 第1節 手法1の準備（1） 迷路の関係から全体を理解する 第1項 各部の呼び方と図について 第2項 迷路4と迷路3の関係 第3項 迷路3と迷路2の関係 第4項 迷路2と迷路1の関係 第5項 隣り合う迷路の関係 第6項 迷路の関係から全体を理解する 第2節 手法1の準備（2） 迷路の関係の数式を作る 第1項 II型迷路の漸化式を作る 第2項 他の迷路の漸化式を作る 第3項 手法1の数式一覧 隣り合う迷路の関係の数式 第3節 手法1の計算（各迷路） 迷路の関係の数式を計算する 第1項 手法1の計算（I型迷路） 第2項 手法1の計算（II型迷路） 第3項 手法1の計算（III型迷路） 第4項 手法1の計算（IV型迷路） 第5項 手法1の計算（V型迷路） 第6項 手法1の計算（X型迷路）	第4章 手法2の準備と計算 第1節 手法2の準備 手数を合計する数式を作る 第1項 手法2の計算方法 第2項 各仕掛が1回動く際の手数 第3項 全行程で各仕掛が動く回数 第4項 手法2の数式一覧 各仕掛の手数を合計する数式 第2節 手法2の計算（各迷路） 手数を合計する数式を計算する 第1項 手法2の計算（I型迷路） 第2項 手法2の計算（II型迷路） 第3項 手法2の計算（III型迷路） 第4項 手法2の計算（IV型迷路） 第5項 手法2の計算（V型迷路） 第6項 手法2の計算（X型迷路） 第5章 各迷路ごとの作品の手数

資料

あとがき

はじめに

図の様な迷路の中から1種類だけ迷路を選び、ある部品にその迷路（溝）を彫る。
そして、別の部品からはピンを出し、このピンがその迷路の中に入る。
すると、2つの部品は互いに影響し合い、様々な動きを作り出す。



最初と最後の部品を除き、各部品には迷路とピンを作ることになる。
この様な部品を幾つも作り、タテヨコに（ジグザグに）直列につないで作品を作る。
すると、このようにして出来た作品はどんな動きをするだろうか？

そんな考えを元に、最初に作られた作品が「水瓶座の引出」（RF-55）だ。
この作品ではII型迷路が使われており、仕掛の数は5つだった。

すると、一本道でありながら、2進法や3進法とも違う興味深い動きが現れた。
それは、規則的にも変則的にも見える、初めて見る動きだった。
手数は61手で、シンプルに何の何乗などと表される数字ではなかった。

「これは、どういう手数なのだろう？」そんな疑問が湧いてきた。

更にここで、迷路やつなげる仕掛の数を変えたら、動きや手数はどうなるだろう。
そしてその動きや手数は、どのような仕組みによって作られるのだろう。
例えば同じII型迷路でも、仕掛を10個つなげたら、何手になるだろうか。

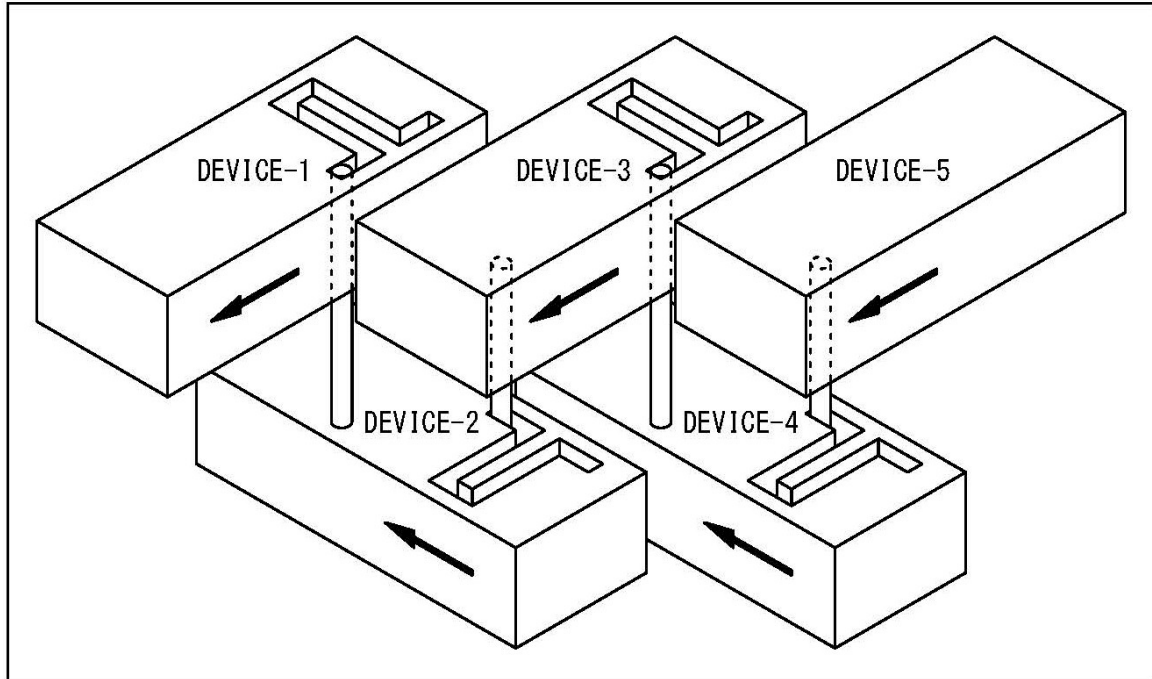
こんなことを考えると、夢（？）が膨らんでくるのは、私だけだろうか。
本稿では、そんな思いを胸に、その真実に迫っていく。

まず「水瓶座の引出」について、その動きや手数の作られ方を分析する。
そこから、こうした作品の底に流れる普遍的な仕組みを明らかにする。
そして更に、迷路や仕掛の数を変えた場合の作品にまで研究を進める。

さて、そんな研究から、何が見えてくるだろうか？（以上）

第1章 「水瓶座の引出」の仕組み

第1節 構造のイメージと各部の名称



図は「水瓶座の引出」（RF-55）の構造のイメージを等角図で表している。

図の様に、最初に動く仕掛から順番に仕掛1、仕掛2、仕掛3...と呼ぶ。
（各仕掛の英語表記はDEVICE-1、DEVICE-2、DEVICE-3...）

それらの内、仕掛1から仕掛4には迷路がある。
仕掛1の迷路を迷路1、仕掛2の迷路を迷路2、仕掛3の迷路を迷路3...と呼ぶ。
（各迷路の英語表記はMAZE-1、MAZE-2...）

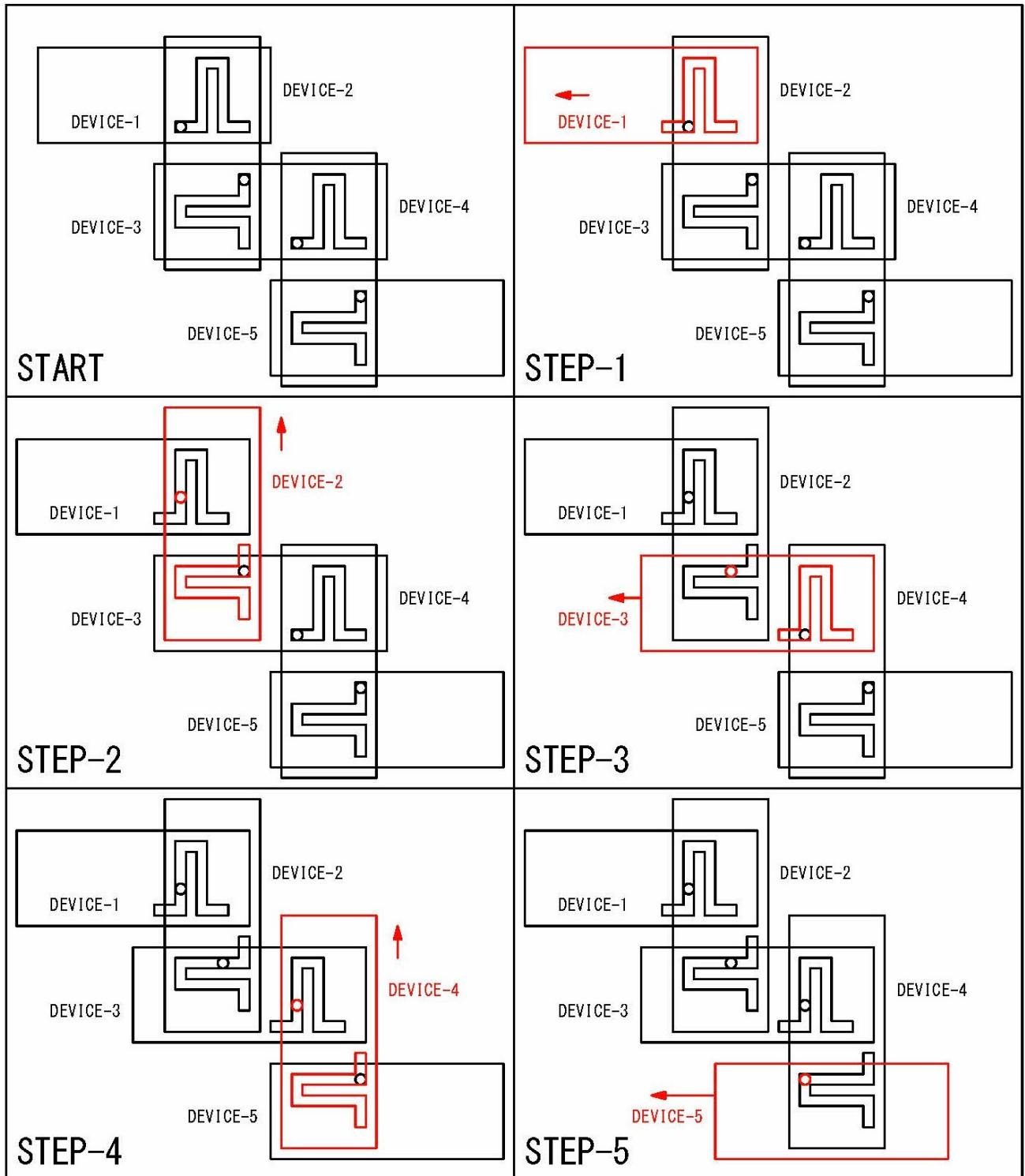
また、仕掛2から仕掛5からはピンが出ている。
迷路1には仕掛2のピンが入っており、迷路2には仕掛3のピンが入っている。
迷路3には仕掛4のピンが入っており、迷路4には仕掛5のピンが入っている。
これによって、隣り合う仕掛の迷路とピンが影響し合い、作品の動きが作られている。

第2節 引出と作品のゴールについて

また、図では省略しているが、実際には仕掛1と仕掛5の下にはそれぞれ引出がある。
仕掛5の下引出は仕掛5が開いた時に開錠され、5手目で開錠される。
仕掛1の下引出は仕掛1が開いた時に開錠され、61手目で開錠される。

仕掛1の下引出にたどり着くことが作品のゴールとなる。

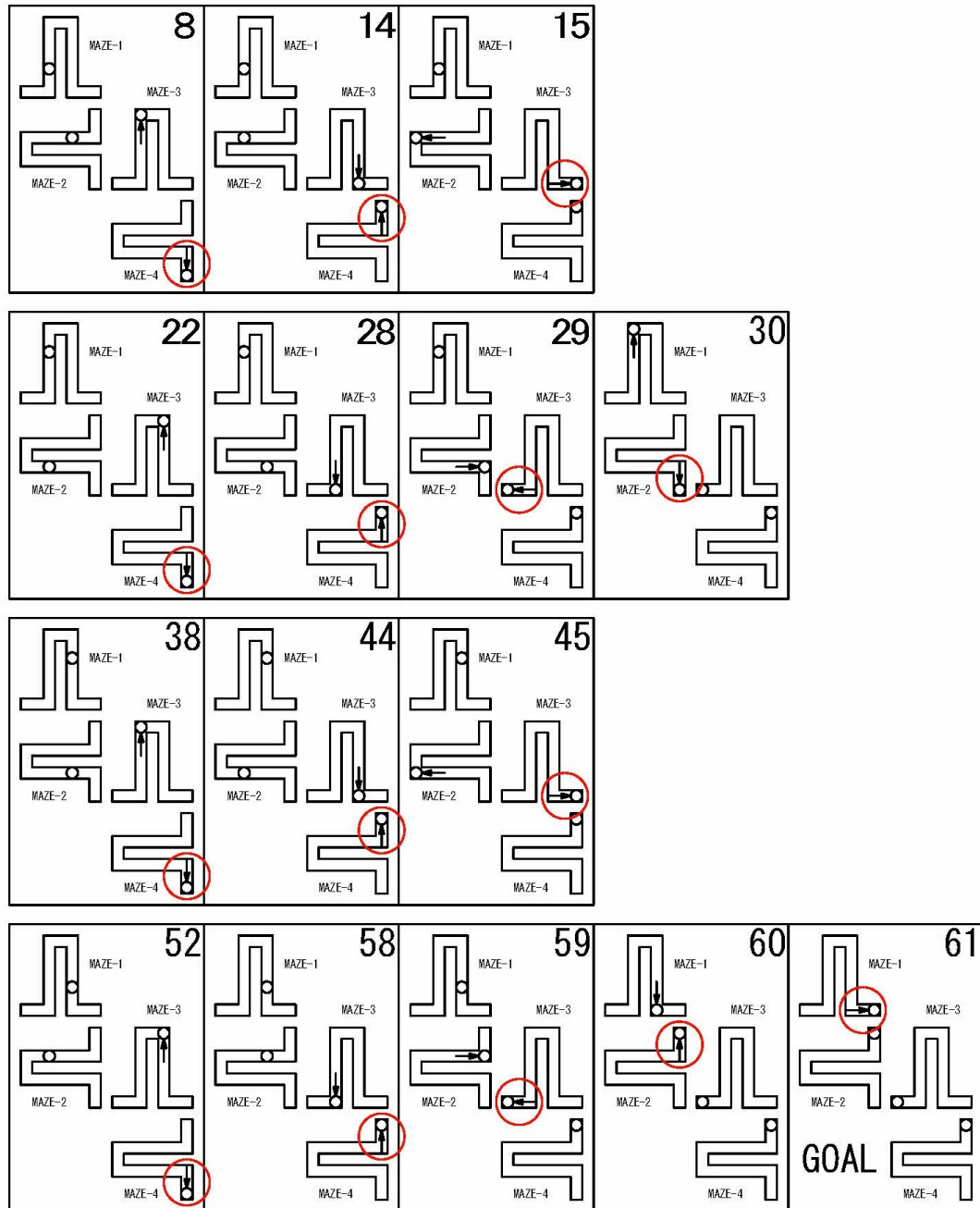
第3節 実際の動きを平面図で見る



図は「水瓶座の引出」の仕掛と迷路、ピンの動きの最初の一部を平面図で表している。

ここから分かるように、仕掛が動く際には、ピンが動く場合と迷路が動く場合がある。しかし、相対的には、どちらも迷路に対してピンが動いていると捉えることが出来る。よって本稿では、分かり易くする為、主に迷路の中をピンが動くイメージで考えていく。

第4節 動きの大まかな流れを見る



図は、「水瓶座の引出」(RF-55)の各迷路において、ピンが終端または始端に到着した瞬間の操作を抜き出したもの。ピンの初期位置を始端とし、逆の端を終端とする。

各操作はピンが長い溝の途中で次に移る事があり、順番は複雑だ。そこで、ピンが始端または終端に来る瞬間に注目し、動きの大まかな流れを見る。するとピンは以下の流れで動く。

- 8、14、15手目：迷路4で往復→迷路3で終端へ
- 22、28～30手目：迷路4で往復→迷路3で始端へ→迷路2で終端へ
- 38、44、45手目：迷路4で往復→迷路3で終端へ
- 52、58～61手目：迷路4で往復→迷路3で始端へ→迷路2で始端へ→迷路1で終端へ

第5節 作品の動きの全体を把握する

仕掛が5つの作品である「水瓶座の引出」について、動く仕掛の番号を列として並べる。
また、同じ迷路で仕掛が4つ、3つ、2つ、1つの作品についても同様に列を作る。

ただしここでは、一番奥の仕掛を起点とし、仕掛の番号とは逆方向に考える。

黒は開ける操作で、赤は閉める操作。

1は交互に色が変わる。黒で完全に開き、赤で完全に閉まる。これを繰り返す。

他は3個毎に交互に色が変わる。黒の3個目で完全に開き、赤の3個目で完全に閉まる。

改行、括弧、枠は見易くする便宜上のもの。（ ）内は一番奥の迷路でピンが動く操作。

仕掛が5つの作品	5,
	4,3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3,4,3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3,4,
	5,
	4,3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3,4,3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3,4,
	5
仕掛が4つの作品	4,3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3,4,3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3,4
仕掛が3つの作品	3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3
仕掛が2つの作品	(2,1,2,1,2)
仕掛が1つの作品	1

これを見ると、仕掛の動きの全体像が分かる。動きがきれいな対称形を成している。
また、各作品の列を比較すると、列の一部にかなり共通の列が含まれることに気付く。

例えば「仕掛が5つの作品の列から5を除いた、残りの前半部分（枠の中）」は「仕掛が4つの作品の列」と一致する。これは「仕掛が5つの作品の操作から仕掛5の操作を除いた、仕掛4が開くまでの部分」が「仕掛が4つの作品の操作」と一致することを表す。

つまり、仕掛が5つの作品から1手目の仕掛を無くすと、その動きは、仕掛が4つの作品の動きと完全に一致する。この様な関係は、図の様に更に仕掛の数を減らした場合でも、また仕掛を増やした場合でも、一般に成り立つ。

またこうした関係は、一番奥の仕掛を起点とした場合において成り立つ。逆に1手目の仕掛を起点とした場合には、数字がずれてしまい、そのまま比較することが出来ない。

第2章 本稿で扱う2つの計算手法

本稿では、作品の手数を以下の2つの手法で計算する。それぞれ計算の方向が異なる。

第1節 計算の手法1（逆方向の計算） 隣り合う迷路の関係から計算する

手法1では、隣り合う迷路の（間の手数の）関係から、作品の手数を求める。
例えばⅡ型迷路の場合、隣り合う迷路の間で共通して以下の関係が成り立つ。

$$(\text{ある迷路の手数} \times 2) + 3 = \text{一つ手前の迷路の手数}$$

こうした関係を、各迷路について数式で表し、それらを解いて作品の手数を求める。

ところで、ここでは一番奥の仕掛を起点とし、ここから逆方向に計算する。
これは、1手目を起点とした仕掛の番号の定義とは逆で、1手目を最後と考える。

第2節 計算の手法2（正方向の計算） 各仕掛の手数を合計して計算する

手法2では、各仕掛が1回動く際の手数と、各仕掛が全行程で動く回数から手数を求める。
ある迷路の作品において、任意の仕掛Aの手数は、以下の式によって求められる。

$$\text{仕掛Aの手数} = \text{仕掛Aが1回動く際の手数} \times \text{全行程で仕掛Aが動く回数}$$

この式によって求められた、各仕掛の手数を合計することで、作品の手数を求める。

ところで、ここでは一手目の仕掛を起点とし、ここから正方向に計算する。
これは、1手目を起点とした仕掛の番号の定義と同じで、一番奥を最後と考える。

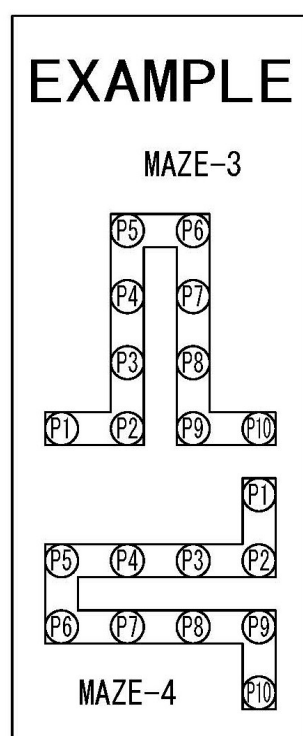
第3章 手法1の準備と計算

第1節 手法1の準備（1）

迷路の関係から全体を理解する

ここでは、隣り合う迷路の手数の関係について明らかにしていく。

第1項 各部の呼び方と図について



図は「水瓶座の引出」（RF-55）のピンの動きの一部を抜き出している。

図は迷路3と4だが、任意の迷路におけるピンの位置を p_1 から p_{10} までの記号で表す。
 p_1 は溝の始端（ピンの初期位置）であり、 p_{10} は終端（溝の反対側の端）を表す。

p_2 から p_5 、 p_6 から p_9 のような長い溝を「長い溝」と呼ぶ。

p_1 から p_2 、 p_5 から p_6 、 p_9 から p_{10} のような短い溝を「短い溝」と呼ぶ。

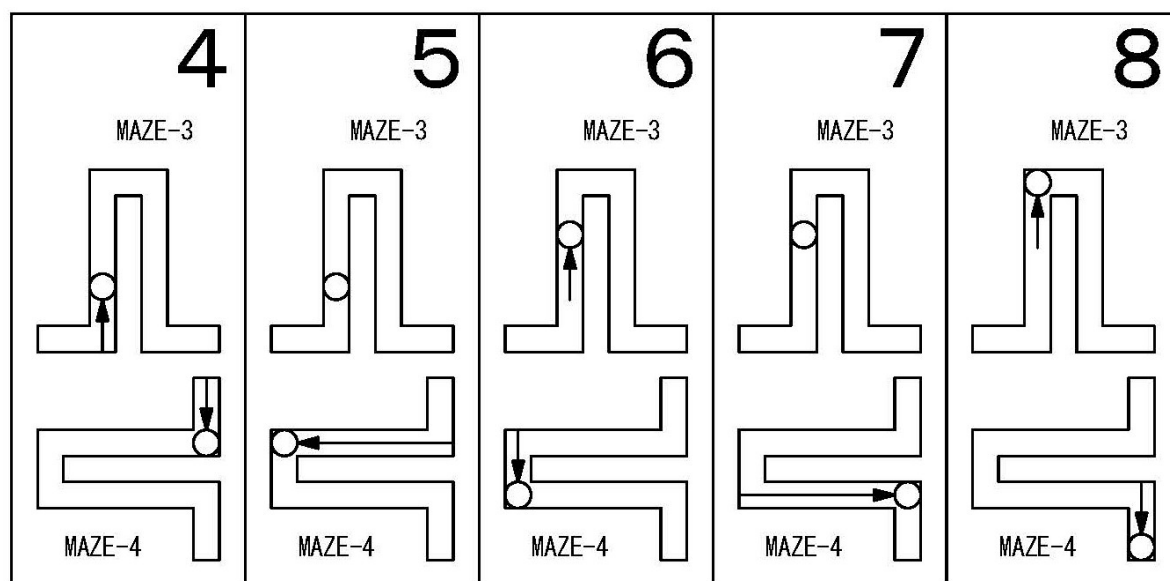
資料のページに、この作品の全61手におけるピンの動きを表す図を掲載した。

また次のページに、その図の一部を抜粋した図を掲載した。（4手目から8手目）

ここでは、これらの図を元にして、隣り合う迷路の関係を順に検討していく。

そしてそこから、隣り合う迷路の手数の関係について明らかにする。

第2項 迷路4と迷路3の関係



4手目から8手目を詳細に見る

図を元に検討する。4手目から8手目までを詳細に見ると、以下の関係が分かる。
この関係を元に、長い溝を一つの動きとみなして、迷路4と迷路3の関係を見ていく。

迷路4のピンが始端から終端へ動く間に、迷路3のピンは丁度長い溝を通り終える。

- 4手目で、迷路4のピンは p_1 から p_2 まで動き、迷路3のピンは p_2 から p_3 まで動く。
- 5手目で、迷路4のピンは p_2 から p_5 まで動き、迷路3のピンは動かない。
- 6手目で、迷路4のピンは p_5 から p_6 まで動き、迷路3のピンは p_3 から p_4 まで動く。
- 7手目で、迷路4のピンは p_6 から p_9 まで動き、迷路3のピンは動かない。
- 8手目で、迷路4のピンは p_9 から p_{10} まで動き、迷路3のピンは p_4 から p_5 まで動く。

迷路4と迷路3の関係を見る

迷路4において、4手目から8手目までの5手で、ピンは p_1 から p_{10} まで動く。
その間、迷路3において、ピンは p_2 から p_5 まで動く。

同様に迷路4において、10手目から14手目までの5手で、ピンは p_{10} から p_1 まで戻る。
その間、迷路3において、ピンは p_6 から p_9 まで動く。

この様に、ピンが迷路3の長い溝を1回通るのに、作品としては5手の手数がかかる。
また、迷路3の p_1 から p_2 、 p_5 から p_6 、 p_9 から p_{10} の動きは、それぞれ1手である。

よって、迷路3におけるピンの p_1 から p_{10} までの手数は、以下の13手となる。
 $p_1 \rightarrow p_2$: 1手、 $p_2 \rightarrow p_5$: 5手、 $p_5 \rightarrow p_6$: 1手、 $p_6 \rightarrow p_9$: 5手、 $p_9 \rightarrow p_{10}$: 1手。

第3項 迷路3と迷路2の関係

さて、これと同様の関係は、迷路3と迷路2の間でも成り立っている。

迷路3において、3手目から15手目までの13手で、ピンは p_1 から p_{10} まで動く。
その間、迷路2において、ピンは長い溝を1回通る。

同様に迷路3において、17手目から29手目までの13手で、ピンは p_{10} から p_1 まで戻る。
その間、迷路2において、ピンは長い溝を1回通る。

この様に、ピンが迷路2の長い溝を1回通るのに、作品としては13手の手数がかかる。
また、迷路2の短い溝を通る動きは3回あり、それぞれ1手である。

よって、迷路2におけるピンの始端から終端までの手数は、
長い溝における13手が2回、および短い溝における1手が3回の、合計29手となる。

第4項 迷路2と迷路1の関係

そして、これと同様の関係は、迷路2と迷路1の間でも成り立っている。

迷路2において、2手目から30手目までの29手で、ピンは始端から終端まで動く。
迷路2において、32手目から60手目までの29手で、ピンは終端から始端まで戻る。
それぞれにおいて、その間、迷路1において、ピンは長い溝を1回通る。

この様に、ピンが迷路1の長い溝を1回通るのに、作品としては29手の手数がかかる。
また、迷路1の短い溝を通る動きは3回あり、それぞれ1手である。

よって、迷路1におけるピンの始端から終端までの手数は、
長い溝における29手が2回、および短い溝における1手が3回の、合計61手となる。

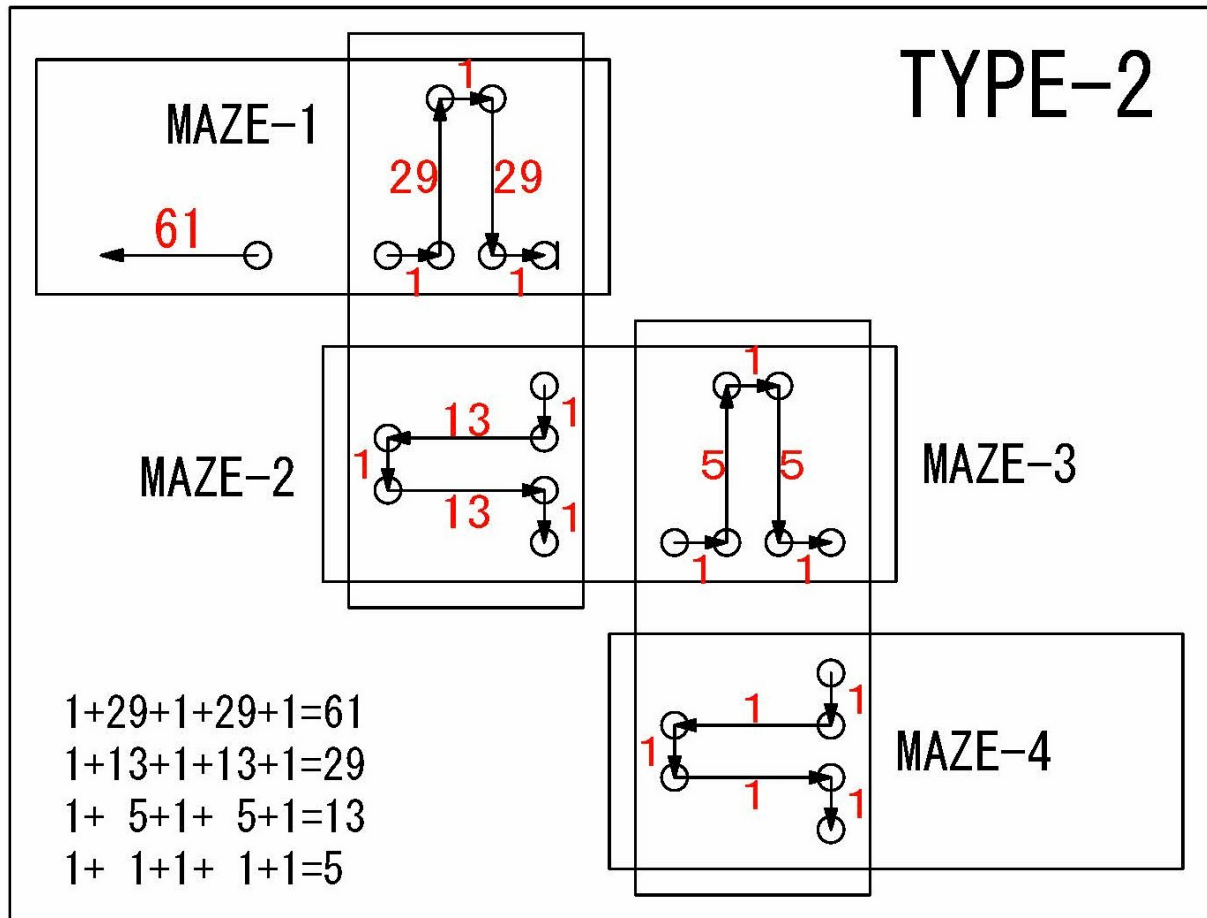
さて、ピンが迷路1を通る手数はこの作品の手数を表し、作品の手数は61手となる。

第5項 隣り合う迷路の関係

以上から、隣り合う迷路の関係を以下の様に理解することが出来る。

①ある迷路をピンが通る手数は、一つ手前の迷路の長い溝をピンが通る手数となる。
②Ⅱ型迷路の作品において、長い溝は2本、短い溝は3本なので、ある迷路全体をピンが通る手数を「2倍して3を足す」と、一つ手前の迷路全体をピンが通る手数となる。

第6項 迷路の関係から全体を理解する



図は「水瓶座の引出」（RF-55）の迷路であり、各溝の赤い数字は、ピンが各溝を1回通る際の手数を表している。ここから、手数が増える仕組みの全体を理解する事が出来る。

一つずつ見ると、以下の様になっている。

迷路4の長い溝は、仕掛5のピンが動く手数（途中で止まらない）を反映し、1手。
 迷路3の長い溝は、迷路4のピンが始端から終端まで動く際の手数を反映し、5手。
 迷路2の長い溝は、迷路3のピンが始端から終端まで動く際の手数を反映し、13手。
 迷路1の長い溝は、迷路2のピンが始端から終端まで動く際の手数を反映し、29手。
 本作品の総手数は、迷路1のピンが始端から終端まで動く際の手数を反映し、61手。

この様に、一番奥の迷路4から始まり、その手数が一つ手前の迷路の手数に反映する。更に同様の関係が続いて行き、最後の迷路1の手数が作品の手数となる。

こうした仕組みは、仕掛の数が任意の作品において成立する。上の図の作品から、仕掛の数を変えようとする場合、1手目側の仕掛を増減させればよい。

例えば、仕掛を6個とする場合、1手目側に「 $1+61+1+61+1$ 」手の仕掛を追加すればよい。逆に仕掛を4個とする場合、1手目側の迷路1を省けばよい。

第2節 手法1の準備（2）迷路の関係の数式を作る

第1項 II型迷路の漸化式を作る

仕掛が任意の数の作品における漸化式

仕掛が任意の数つながった、II型迷路の作品を元に考える。ここまでに、「ある迷路全体をピンが通る手数を『2倍して3を足す』と、一つ手前の迷路全体をピンが通る手数となる」ことが分かった。これを式で表すと以下の様になる。

$$(\text{ある迷路の手数} \times 2) + 3 = \text{一つ手前の迷路の手数}$$

ここで、以下の様に定義する。（定義1）

k : 一番奥の仕掛を起点とし、ここから逆方向に仕掛を数えた番号。($k = 1, 2, 3 \dots$)
 a_k : k 番目の仕掛が開く際にかかる（開き始めてから完全に開くまでの）手数。
 a_{k+1} : $k+1$ 番目の仕掛が開く際にかかる（開き始めてから完全に開くまでの）手数。

すると上の式は、数列の漸化式を用いて以下の様に表すことが出来る。
 任意の数の作品において、1番目の仕掛が開く手数は1手であり、初項は1となる。

$$a_{k+1} = 2 \cdot a_k + 3 \quad (a_1 = 1) \quad (1)$$

仕掛が n 個の作品における漸化式

ここで、仕掛がちょうど n 個つながった作品を考えると、その手順・手数は、仕掛が n 個以上の任意の数つながった作品において、 n 番目の仕掛が（開き始めてから完全に）開くまでの手順・手数と等しくなる。（第1章、第5節を参照）

よってその手数は、 a_k の k を n に入れ替えて a_n と表せる。定義は以下。（定義2）

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)
 a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

以上から、(1)の式の k を n に入れ替えて、II型迷路の作品の漸化式は以下の様になる。
 仕掛がちょうど1個の作品の手数は1手で、初項は1となる。これは(1)と整合性がある。

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3 \quad (a_1 = 1) \quad (2)$$

第2項 他の迷路の漸化式を作る

同様の方法で、他の迷路の作品の漸化式を作る。（Ⅱ型迷路の場合も掲載する。）
 $a_1 = 1$ は、同様の理由で、Ⅱ型迷路だけでなく任意の迷路において一般に成り立つ。

Ⅰ型迷路は、長い溝が1本、短い溝は2本なので、一つ手前の迷路の手数は、
 元の迷路の手数を「1倍して2を足した」数となり、迷路Ⅰの漸化式は以下となる。

$$a_{n+1} = 1 \cdot a_n + 2 \quad (a_1 = 1) \quad (1)$$

Ⅱ型迷路は、長い溝が2本、短い溝は3本なので、一つ手前の迷路の手数は、
 元の迷路の手数を「2倍して3を足した」数となり、迷路Ⅱの漸化式は以下となる。

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3 \quad (a_1 = 1) \quad (2)$$

Ⅲ型迷路は、長い溝が3本、短い溝は4本なので、一つ手前の迷路の手数は、
 元の迷路の手数を「3倍して4を足した」数となり、迷路Ⅲの漸化式は以下となる。

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 4 \quad (a_1 = 1) \quad (3)$$

迷路Ⅳは、長い溝が4本、短い溝は5本なので、一つ手前の迷路の手数は、
 元の迷路の手数を「4倍して5を足した」数となり、迷路Ⅳの漸化式は以下となる。

$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n + 5 \quad (a_1 = 1) \quad (4)$$

Ⅴ型迷路は、長い溝が5本、短い溝は6本なので、一つ手前の迷路の手数は、
 元の迷路の手数を「5倍して6を足した」数となり、迷路Ⅴの漸化式は以下となる。

$$a_{n+1} = 5 \cdot a_n + 6 \quad (a_1 = 1) \quad (5)$$

X型迷路を、長い溝が x 本、短い溝は $(x+1)$ 本とすると、一つ手前の迷路の手数は、
 元の迷路の手数を「 x 倍して $(x+1)$ を足した」数となり、迷路Xの漸化式は以下となる。

$$a_{n+1} = x \cdot a_n + (x+1) \quad (a_1 = 1) \quad (6)$$

第3項 手法1の数式一覧 隣り合う迷路の関係の数式

各迷路の作品について、隣り合う迷路の関係を表す数式とその解を整理して示す。

一番奥の仕掛を起点とする。

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

X型迷路は、長い溝が x 本、短い溝が $(x+1)$ 本の迷路 ($x = 1, 2, 3 \dots$)

迷路のタイプ	漸化式	一般項
I型迷路 (TYPE-1)	$a_{n+1} = 1 \cdot a_n + 2 \quad (a_1 = 1)$	$a_n = 2n - 1$
II型迷路 (TYPE-2)	$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3 \quad (a_1 = 1)$	$a_n = 2 \cdot 2^n - 3$
III型迷路 (TYPE-3)	$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 4 \quad (a_1 = 1)$	$a_n = 3^n - 2$
IV型迷路 (TYPE-4)	$a_{n+1} = 4 \cdot a_n + 5 \quad (a_1 = 1)$	$a_n = \frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{5}{3}$
V型迷路 (TYPE-5)	$a_{n+1} = 5 \cdot a_n + 6 \quad (a_1 = 1)$	$a_n = \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{3}{2}$
X型迷路 (TYPE-X)	$a_{n+1} = x \cdot a_n + (x+1) \quad (a_1 = 1)$	$a_n = \frac{2 \cdot x^n - x - 1}{x - 1} \quad (x \geq 2)$

第3節 手法1の計算（各迷路）

迷路の関係の数式を計算する

各迷路について、迷路の関係を表す数式（漸化式）を計算して一般項を求める。
各定義は以下の様にする。

一番奥の仕掛を起点とする。

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

第1項 手法1の計算（I型迷路）

I型迷路は、長い溝が1本、短い溝が2本の迷路

I型迷路で作られた作品の場合、以下の漸化式が成り立つ。これを解く。

$$a_{n+1} = a_n + 2 \quad (1)$$

$a_1 = 1$ より、 a_n は初項1、公差2の等差数列であるから、

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1 \quad (2)$$

整理して

$a_n = 2n - 1 \quad (3)$

これでI型迷路の場合の一般項が得られた。

第2項 手法1の計算（Ⅱ型迷路）

Ⅱ型迷路は、長い溝が2本、短い溝が3本の迷路

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

Ⅱ型迷路で作られた作品の場合、以下の漸化式が成り立つ。これを解く。

$$a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad (1)$$

A を定数とし、(1)を以下の式で表せるものとする。

$$a_{n+1} - A = 2(a_n - A) \quad (2)$$

これを展開する。

$$a_{n+1} = 2a_n - A \quad (3)$$

元の式と比較すると $A = -3$ となり、これを(2)に代入して、(1)は以下のように変形できる。

$$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3) \quad (4)$$

$b_n = a_n + 3$ とおくと、 $b_{n+1} = a_{n+1} + 3$ となり、(4)に代入して

$$b_{n+1} = 2b_n \quad (5)$$

$b_1 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$ より、 b_n は初項4、公比2の等比数列となるから、

$$b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot 2^n \quad (6)$$

ここで $b_n = a_n + 3$ だったから、

$a_n = 2 \cdot 2^n - 3 \quad (7)$

これでⅡ型迷路の場合の一般項が得られた。

第3項 手法1の計算（Ⅲ型迷路）

Ⅲ型迷路は、長い溝が3本、短い溝が4本の迷路

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

Ⅲ型迷路で作られた作品の場合、以下の漸化式が成り立つ。これを解く。

$$a_{n+1} = 3a_n + 4 \quad (1)$$

A を定数とし、(1)を以下の式で表せるものとする。

$$a_{n+1} - A = 3(a_n - A) \quad (2)$$

これを展開する。

$$a_{n+1} = 3a_n - 2A \quad (3)$$

元の式と比較すると $A = -2$ となり、これを(2)に代入して、(1)は以下のように変形できる。

$$a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2) \quad (4)$$

$b_n = a_n + 2$ とおくと、 $b_{n+1} = a_{n+1} + 2$ となり、(4)に代入して

$$b_{n+1} = 3b_n \quad (5)$$

$b_1 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$ より、 b_n は初項3、公比3の等比数列となるから、

$$b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \quad (6)$$

ここで $b_n = a_n + 2$ だったから、

$a_n = 3^n - 2 \quad (7)$

これでⅢ型迷路の場合の一般項が得られた。

第4項 手法1の計算（IV型迷路）

IV型迷路は、長い溝が4本、短い溝が5本の迷路

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

IV型迷路で作られた作品の場合、以下の漸化式が成り立つ。これを解く。

$$a_{n+1} = 4a_n + 5 \quad (1)$$

A を定数とし、(1)を以下の式で表せるものとする。

$$a_{n+1} - A = 4(a_n - A) \quad (2)$$

これを展開する。

$$a_{n+1} = 4a_n - 3A \quad (3)$$

元の式と比較すると $A = -\frac{5}{3}$ となり、これを(2)に代入して、(1)は以下のように変形できる。

$$a_{n+1} + \frac{5}{3} = 4\left(a_n + \frac{5}{3}\right) \quad (4)$$

$b_n = a_n + \frac{5}{3}$ とおくと、 $b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{5}{3}$ となり、(4)に代入して

$$b_{n+1} = 4b_n \quad (5)$$

$b_1 = a_1 + \frac{5}{3} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$ より、 b_n は初項 $\frac{8}{3}$ 、公比4の等比数列となるから、

$$b_n = \frac{8}{3} \cdot 4^{n-1} = \frac{2}{3} \cdot 4^n \quad (6)$$

ここで $b_n = a_n + \frac{5}{3}$ だったから、

$a_n = \frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{5}{3} \quad (7)$

これでIV型迷路の場合の一般項が得られた。

第5項 手法1の計算（V型迷路）

V型迷路は、長い溝が5本、短い溝が6本の迷路

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

V型迷路で作られた作品の場合、以下の漸化式が成り立つ。これを解く。

$$a_{n+1} = 5a_n + 6 \quad (1)$$

A を定数とし、(1)を以下の式で表せるものとする。

$$a_{n+1} - A = 5(a_n - A) \quad (2)$$

これを展開する。

$$a_{n+1} = 5a_n - 4A \quad (3)$$

元の式と比較すると $A = -\frac{3}{2}$ となり、これを(2)に代入して、(1)は以下のように変形できる。

$$a_{n+1} + \frac{3}{2} = 5\left(a_n + \frac{3}{2}\right) \quad (4)$$

$b_n = a_n + \frac{3}{2}$ とおくと、 $b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{3}{2}$ となり、(4)に代入して

$$b_{n+1} = 5b_n \quad (5)$$

$b_1 = a_1 + \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ より、 b_n は初項 $\frac{5}{2}$ 、公比5の等比数列となるから、

$$b_n = \frac{5}{2} \cdot 5^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 5^n \quad (6)$$

ここで $b_n = a_n + \frac{3}{2}$ だったから、

$a_n = \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{3}{2} \quad (7)$

これでV型迷路の場合の一般項が得られた。

第6項 手法1の計算（X型迷路）

X型迷路は、長い溝が x 本、短い溝が $(x+1)$ 本の迷路 ($x = 1, 2, 3 \dots$)

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

X型迷路で作られた作品の場合、以下の漸化式が成り立つ。これを解く。

$$a_{n+1} = x \cdot a_n + (x+1) \quad (1)$$

A を定数とし、(1)を以下の式で表せるものとする。

$$a_{n+1} - A = x \cdot (a_n - A) \quad (2)$$

これを展開する。

$$a_{n+1} = x \cdot a_n - A \cdot (x-1) \quad (3)$$

元の式と比較すると

$$x+1 = -A \cdot (x-1) \quad (4)$$

ここで $x \geq 2$ の時、

$$A = -\frac{x+1}{x-1} \quad (5)$$

これを(2)に代入して、(1)は以下のように変形できる。

$$a_{n+1} + \frac{x+1}{x-1} = x \cdot \left(a_n + \frac{x+1}{x-1} \right) \quad (x \geq 2) \quad (6)$$

$b_n = a_n + \frac{x+1}{x-1}$ とおくと、 $b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{x+1}{x-1}$ となり、(6)に代入して

$$b_{n+1} = x \cdot b_n \quad (7)$$

$b_1 = a_1 + \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$ より、 b_n は初項 $\frac{2x}{x-1}$ 、公比 x の等比数列となるから、

$$b_n = \frac{2x}{x-1} \cdot x^{n-1} = \frac{2}{x-1} \cdot x^n \quad (8)$$

ここで $b_n = a_n + \frac{x+1}{x-1}$ だったから、

$$a_n = b_n - \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} \cdot x^n - \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x^n - x - 1}{x-1} \quad (x \geq 2) \quad (9)$$

これでx型迷路の場合の一般項が得られた。

ただし $x = 1$ の場合の一般項は、別に計算した通り、 $a_n = 2n - 1$ となる。

第4章 手法2の準備と計算

第1節 手法2の準備 手数を合計する数式を作る

第1項 手法2の計算方法

手数の求め方の計算式

任意の仕掛Aについて、その手数は以下の計算式によって求められる。

$$\text{仕掛Aの手数} = \text{仕掛Aが1回動く際の手数} \times \text{全行程で仕掛Aが動く回数}$$

各仕掛の手数が分かれば、以下の様にして作品の手数が求められる。

$$\text{作品の手数} = \text{各仕掛の手数の合計}$$

手数の求め方の詳細

上の式で、「仕掛Aの手数」とは、全手数の内、仕掛Aが動く分の手数のこと。

「仕掛が1回動く」とは、仕掛が閉じた状態から開いた状態まで動くこと。またはその逆。

例えば、仕掛Aが3段階で開く場合、仕掛Aが1回動く際の手数は3手となる。

更に、全行程で仕掛Aが動く回数が4回の場合、仕掛Aの手数は 3×4 より12手となる。

各仕掛が1回動く際にかかる手数は、迷路の種類、作品の仕掛の数、仕掛の番号で決まる。

同じく全行程で各仕掛が動く回数は、迷路の種類、作品の仕掛の数、仕掛の番号で決まる。

これらを掛け合わせて各仕掛の手数を求め、各仕掛の手数を合計して作品の手数を求める。

以上が、手法2の計算方法である。

この方法で、迷路のタイプごとに作品の手数を計算する。

尚、手法2では、元の定義と同様に **1手目** に動く仕掛を起点とする。（**正方向**の計算）

第2項 各仕掛が1回動く際の手数

仕掛が n 個の作品について、各仕掛が1回動く際にかかる手数を導く。
以下の2つの作品を例に見ていく。いずれの作品も仕掛は5個。

例1：「水瓶座の引出」（RF-55）において、以下の様になる。（Ⅱ型迷路）
仕掛1～4において、ピンは短い溝を3段階で通る。つまり3手となる。
仕掛5において、ピンは長い溝を止まらずに通る。つまり1手となる。

例2：「水瓶座の引出2」（RF-65）において、以下の様になる。（Ⅲ型迷路）
仕掛1～4において、ピンは短い溝を4段階で通る。つまり4手となる。
仕掛5において、ピンは長い溝を止まらずに通る。つまり1手となる。

これらを見ると、各仕掛が1回動く際にかかる手数について、以下のことが分かる。

- ①一番奥の仕掛の手数は、迷路のタイプに関わらず、常に1手。
- ②その他の仕掛の手数は、迷路のタイプで決まり、その迷路の短い溝の数と同じ。
その結果、その手数は、一つの作品において一定となる。

よって、仕掛が n 個の作品において、各仕掛が1回動く際にかかる手数は、1番から $(n-1)$ 番の仕掛と、 n 番の仕掛において分かれ、迷路ごとに決まる。

これを表にまとめると、以下の様になる。

仕掛 \ 迷路	I 型	Ⅱ 型	Ⅲ型	Ⅳ型	V 型	X型
1番から $(n-1)$ 番	2手	3手	4手	5手	6手	$x+1$ 手
n 番	1手	1手	1手	1手	1手	1手

第3項 全行程で各仕掛が動く回数

例を元に、各仕掛が動く回数の決まり方について明らかにする。

例1：「水瓶座の引出」（RF-55）で、各仕掛が動く回数は以下。（Ⅱ型迷路）

全行程で、仕掛1は（閉じた状態から開いた状態まで）1回動く。

仕掛1が1回動く間に、仕掛2は2回動く。（迷路の長い溝は2本である為）

仕掛2が1回動く間に、仕掛3は2回動く。（迷路の長い溝は2本である為）

仕掛3が1回動く間に、仕掛4は2回動く。（迷路の長い溝は2本である為）

仕掛4が1回動く間に、仕掛5は2回動く。（迷路の長い溝は2本である為）

全行程で仕掛1は1回動く。その間に仕掛2は2回動く。その間に仕掛3は4回動く。
その間に仕掛3は8回動く。その間に仕掛4は16回動く。

例2：「水瓶座の引出2」（RF-65）で、各仕掛が動く回数は以下。（Ⅲ型迷路）

全行程で、仕掛1は（閉じた状態から開いた状態まで）1回動く。

仕掛1が1回動く間に、仕掛2は3回動く。（迷路の長い溝は3本である為）

仕掛2が1回動く間に、仕掛3は3回動く。（迷路の長い溝は3本である為）

仕掛3が1回動く間に、仕掛4は3回動く。（迷路の長い溝は3本である為）

仕掛4が1回動く間に、仕掛5は3回動く。（迷路の長い溝は3本である為）

全行程で仕掛1は1回動く。その間に仕掛2は3回動く。その間に仕掛3は9回動く。
その間に仕掛4は27回動く。その間に仕掛5は81回動く。

各仕掛が動く回数の決まり方

Ⅱ型迷路の作品において、各仕掛が動く回数は、1番が1で、次々に2倍になっていく。

Ⅲ型迷路の作品において、各仕掛が動く回数は、1番が1で、次々に3倍になっていく。

X型迷路の作品（長い溝はx本）についても、同様に考えることが出来る。即ち、

X型迷路の作品において、各仕掛が動く回数は、1番が1で、次々にx倍になっていく。

整理すると、1番の仕掛が動く回数と、次の仕掛の手数の倍率は以下の様になる。

全行程で各仕掛が動く回数は、この決まり方を元に計算することが出来る。

タイプ→	I型迷路	Ⅱ型迷路	Ⅲ型迷路	Ⅳ型迷路	V型迷路	X型迷路
1番の回数	1回	1回	1回	1回	1回	1回
次の倍率	1倍	2倍	3倍	4倍	5倍	x倍

第4項 手法2の数式一覧 各仕掛の手数を合計する数式

各迷路の作品について、各仕掛の手数を合計する数式とその解を整理して示す。

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

X型迷路は、長い溝が x 本、短い溝が $(x+1)$ 本の迷路 ($x = 1, 2, 3 \dots$)

k : **1手目**の仕掛を起点とし、ここから**正方向**に仕掛を数えた番号。($k = 1, 2, 3 \dots$)

当然、 $1 \leq k \leq n$ である。

迷路のタイプ	計算式	解
I型迷路 (TYPE-1)	$a_n = 2(n-1) + 1$	$a_n = 2n - 1$
II型迷路 (TYPE-2)	$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (3 \cdot 2^{k-1}) + 2^{n-1}$	$a_n = 2 \cdot 2^n - 3$
III型迷路 (TYPE-3)	$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (4 \cdot 3^{k-1}) + 3^{n-1}$	$a_n = 3^n - 2$
IV型迷路 (TYPE-4)	$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (5 \cdot 4^{k-1}) + 4^{n-1}$	$a_n = \frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{5}{3}$
V型迷路 (TYPE-5)	$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (6 \cdot 5^{k-1}) + 5^{n-1}$	$a_n = \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{3}{2}$
X型迷路 (TYPE-X)	$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} ((x+1) \cdot x^{k-1}) + x^{n-1}$	$a_n = \frac{2x^n - x - 1}{x - 1} \quad (x \geq 2)$

※ k と n について (変数か定数か)

ところで、 k と n は元々変数である。

しかし、手数を求める式を作って解く段階では、 k は変数として、 n は定数の様に扱う。

k はこの段階においてのみ現れる数で、式を解いた後は現れない。

式を解き、その解が導かれた後の段階において、 n は変数として扱う。

手数を求める式は、 n の関数として表されているから、 n を与えることで手数が求まる。

第2節 手法2の計算（各迷路）

手数を合計する数式を計算する

第1項 手法2の計算（I型迷路）

I型迷路は、長い溝が1本、短い溝が2本の迷路

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

k : **1手目**の仕掛を起点とし、ここから**正方向**に仕掛を数えた番号。($k = 1, 2, 3 \dots$)

各仕掛が1回動く際の手数

仕掛が n 個の作品において、以下の様になる。

1番から $(n-1)$ 番の仕掛は、**2段階**で動く。つまり**2手**となる。

n 番の仕掛は、途中で止まらずに動く。つまり1手となる。

よって、仕掛が1回動く際の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{ では } \mathbf{2手}, k = n \text{ では } 1手$$

全行程で各仕掛が動く回数

手数は1, 1, 1, 1... となり、常に1回。よって、以下の様になる。

以上の2つを掛け合わせて、各仕掛の手数は、以下の様になる。

よって、全行程で各仕掛が動く回数は、以下の様に表せる。

$$\text{全ての仕掛において、} \mathbf{1}$$

各仕掛の手数

以上の2つを掛け合わせて、各仕掛の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{ では } \mathbf{2}, k = n \text{ では } \mathbf{1}$$

作品の総手数

各仕掛の手数を合計し、仕掛が n 個の作品の手数 a_n は以下の様に計算できる。

$$a_n = 2(n-1) + 1 = 2n - 1$$

第2項 手法2の計算（Ⅱ型迷路）

Ⅱ型迷路は、長い溝が2本、短い溝が3本の迷路

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

k : **1手目**の仕掛を起点とし、ここから**正方向**に仕掛を数えた番号。($k = 1, 2, 3 \dots$)

各仕掛が1回動く際の手数

仕掛が n 個の作品において、以下の様になる。

1番から $(n-1)$ 番の仕掛は、**3段階**で動く。つまり**3手**となる。

n 番の仕掛は、途中で止まらずに動く。つまり1手となる。

よって、仕掛が1回動く際の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{では } \mathbf{3手}、k = n \text{では } 1手$$

全行程で各仕掛が動く回数

手数は1, 2, 4, 8... となり、これは初項1、公比2の等比数列。一般項は 2^{k-1} 。

よって、全行程で各仕掛が動く回数は、以下の様に表せる。

$$\text{全ての仕掛において、} \mathbf{2^{k-1}}$$

各仕掛の手数

以上の2つを掛け合わせて、各仕掛の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{では } \mathbf{3 \cdot 2^{k-1}}、k = n \text{では } \mathbf{1 \cdot 2^{k-1} = 2^{n-1}}$$

作品の総手数

各仕掛の手数を合計し、仕掛が n 個の作品の手数 a_n は以下の様に計算できる。

$$\begin{aligned} a_n &= (3 \cdot 2^{1-1} + 3 \cdot 2^{2-1} + \dots + 3 \cdot 2^{(n-1)-1}) + 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (3 \cdot 2^{k-1}) + 2^{n-1} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + 2^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 2^{n-1} = (3 \cdot 2^{n-1} - 3) + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} - 3 \end{aligned}$$

第3項 手法2の計算（Ⅲ型迷路）

Ⅲ型迷路は、長い溝が3本、短い溝が4本の迷路

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

k : **1手目**の仕掛を起点とし、ここから**正方向**に仕掛を数えた番号。($k = 1, 2, 3 \dots$)

各仕掛が1回動く際の手数

仕掛が n 個の作品において、以下の様になる。

1番から $(n-1)$ 番の仕掛は、**4段階**で動く。つまり**4手**となる。

n 番の仕掛は、途中で止まらずに動く。つまり1手となる。

よって、仕掛が1回動く際の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{ では } \mathbf{4手}, k = n \text{ では } 1手$$

全行程で各仕掛が動く回数

手数は1, 3, 9, 27... となり、これは初項1、公比3の等比数列。一般項は 3^{k-1} 。

よって、全行程で各仕掛が動く回数は、以下の様に表せる。

$$\text{全ての仕掛において、} \mathbf{3^{k-1}}$$

各仕掛の手数

以上の2つを掛け合わせて、各仕掛の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{ では } \mathbf{4 \cdot 3^{k-1}}, k = n \text{ では } \mathbf{1 \cdot 3^{k-1} = 3^{n-1}}$$

作品の総手数

各仕掛の手数を合計し、仕掛が n 個の作品の手数 a_n は以下の様に計算できる。

$$\begin{aligned} a_n &= (4 \cdot 3^{1-1} + 4 \cdot 3^{2-1} + \dots + 4 \cdot 3^{(n-1)-1}) + 3^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (4 \cdot 3^{k-1}) + 3^{n-1} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} 3^k + 3^{n-1} = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} + 3^{n-1} = (2 \cdot 3^{n-1} - 2) + 3^{n-1} = 3^n - 2 \end{aligned}$$

第4項 手法2の計算（Ⅳ型迷路）

Ⅳ型迷路は、長い溝が4本、短い溝が5本の迷路

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

k : **1手目**の仕掛を起点とし、ここから**正方向**に仕掛を数えた番号。($k = 1, 2, 3 \dots$)

各仕掛が1回動く際の手数

仕掛が n 個の作品において、以下の様になる。

1番から $(n-1)$ 番の仕掛は、**5段階**で動く。つまり**5手**となる。

n 番の仕掛は、途中で止まらずに動く。つまり1手となる。

よって、仕掛が1回動く際の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{では } \mathbf{5手}、k = n \text{では } 1 \text{手}$$

全行程で各仕掛が動く回数

手数は1, 4, 16, 64 ... となり、これは初項1、公比4の等比数列。一般項は 4^{k-1} 。

よって、全行程で各仕掛が動く回数は、以下の様に表せる。

$$\text{全ての仕掛において、} \mathbf{4^{k-1}}$$

各仕掛の手数

以上の2つを掛け合わせて、各仕掛の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{では } \mathbf{5 \cdot 4^{k-1}}、k = n \text{では } \mathbf{1 \cdot 4^{k-1} = 4^{n-1}}$$

作品の総手数

各仕掛の手数を合計し、仕掛が n 個の作品の手数 a_n は以下の様に計算できる。

$$\begin{aligned} a_n &= (5 \cdot 4^{1-1} + 5 \cdot 4^{2-1} + \dots + 5 \cdot 4^{(n-1)-1}) + 4^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (5 \cdot 4^{k-1}) + 4^{n-1} \\ &= \frac{5}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} 4^k + 4^{n-1} = \frac{5}{4} \cdot 4 \cdot \frac{4^{n-1} - 1}{4 - 1} + 4^{n-1} = \left(\frac{5}{3} \cdot 4^{n-1} - \frac{5}{3} \right) + 4^{n-1} = \frac{2}{3} \cdot 4^n - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

第5項 手法2の計算（V型迷路）

V型迷路は、長い溝が5本、短い溝が6本の迷路

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数 ($n = 1, 2, 3 \dots$)

k : **1手目**の仕掛を起点とし、ここから**正方向**に仕掛を数えた番号。($k = 1, 2, 3 \dots$)

各仕掛が1回動く際の手数

仕掛が n 個の作品において、以下の様になる。

1番から $(n-1)$ 番の仕掛は、**6段階**で動く。つまり**6手**となる。

n 番の仕掛は、途中で止まらずに動く。つまり1手となる。

よって、仕掛が1回動く際の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{ では } \mathbf{6手}, k = n \text{ では } 1手$$

全行程で各仕掛が動く回数

手数は1, 5, 25, 125 ... となり、これは初項1、公比5の等比数列。一般項は 5^{k-1} 。

よって、全行程で各仕掛が動く回数は、以下の様に表せる。

$$\text{全ての仕掛において、} \mathbf{5^{k-1}}$$

各仕掛の手数

以上の2つを掛け合わせて、各仕掛の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{ では } \mathbf{6 \cdot 5^{k-1}}, k = n \text{ では } \mathbf{1 \cdot 5^{k-1} = 5^{n-1}}$$

作品の総手数

各仕掛の手数を合計し、仕掛が n 個の作品の手数 a_n は以下の様に計算できる。

$$\begin{aligned} a_n &= (6 \cdot 5^{1-1} + 6 \cdot 5^{2-1} + \dots + 6 \cdot 5^{(n-1)-1}) + 5^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (6 \cdot 5^{k-1}) + 5^{n-1} \\ &= \frac{6}{5} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} 5^k + 5^{n-1} = \frac{6}{5} \cdot 5 \cdot \frac{5^{n-1} - 1}{5 - 1} + 5^{n-1} = \left(\frac{3}{2} \cdot 5^{n-1} - \frac{3}{2} \right) + 5^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 5^n - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

第6項 手法2の計算（X型迷路）

X型迷路は、長い溝が x 本、短い溝が $(x+1)$ 本の迷路（ $x = 1, 2, 3 \dots$ ）

a_n : n 個の仕掛をつなげた作品の手数

n : つなげた仕掛の数（ $n = 1, 2, 3 \dots$ ）

k : **1手目**の仕掛を起点とし、ここから**正方向**に仕掛を数えた番号。（ $k = 1, 2, 3 \dots$ ）

各仕掛が1回動く際の手数

仕掛が n 個の作品において、以下の様になる。

1番から $(n-1)$ 番の仕掛は、 **$(x+1)$ 段階**で動く。つまり **$(x+1)$ 手**となる。

n 番の仕掛は、途中で止まらずに動く。つまり1手となる。

よって、仕掛が1回動く際の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{ では } (x+1) \text{ 手、 } k = n \text{ では } 1 \text{ 手}$$

全行程で各仕掛が動く回数

手数は $1, x, x^2, x^3 \dots$ となり、手数は初項1、公比 x の等比数列。一般項は x^{k-1} 。

よって、全行程で各仕掛が動く回数は、以下の様に表せる。

$$\text{全ての仕掛において、 } x^{k-1}$$

各仕掛の手数

以上の2つを掛け合わせて、各仕掛の手数は、以下の様になる。

$$1 \leq k \leq n-1 \text{ では } (x+1) \cdot x^{k-1}、k = n \text{ では } 1 \cdot x^{k-1} = x^{n-1}$$

作品の総手数

各仕掛の手数を合計し、仕掛が n 個の作品の手数 a_n は以下の様に計算できる。

$$\begin{aligned} a_n &= \{(x+1) \cdot x^0 + (x+1) \cdot x^1 + (x+1) \cdot x^2 + \dots + (x+1) \cdot x^{(n-1)-1}\} + x^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} ((x+1) \cdot x^{k-1}) + x^{n-1} = \frac{x+1}{x} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} x^k + x^{n-1} = \frac{x+1}{x} \cdot x \cdot \frac{x^{n-1} - 1}{x-1} + x^{n-1} \\ &= \left(\frac{x+1}{x-1} \cdot x^{n-1} - \frac{x+1}{x-1} \right) + x^{n-1} = \frac{2x^n - x - 1}{x-1} \quad (x \geq 2) \end{aligned}$$

ただし $x = 1$ の場合の一般項は、 $a_n = 2n - 1$ となる。

第5章 各迷路ごとの作品の手数

迷路のタイプごとの作品の手数は以下の様になった。横軸 n がつけた仕掛の数。

仕掛の数→	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
I 型迷路	1	3	5	7	9	11	13
II 型迷路	1	5	13	29	61	125	253
III 型迷路	1	7	25	79	241	727	2,185
IV 型迷路	1	9	41	169	681	2,729	10,921
V 型迷路	1	11	61	311	1,561	7,811	39,061

例えば、この表から以下の様に分かる。

「水瓶座の引出」（RF-55）は、II 型迷路であり $n = 5$ だから、手数は61手となる。

「水瓶座の引出2」（RF-65）は、III 型迷路であり $n = 5$ だから、手数は241手となる。

II 型迷路で仕掛が3個（ $n = 3$ ）の作品を作った場合、手数は13手となる。

II 型迷路で仕掛が6個（ $n = 6$ ）の作品を作った場合、手数は125手となる。

以上

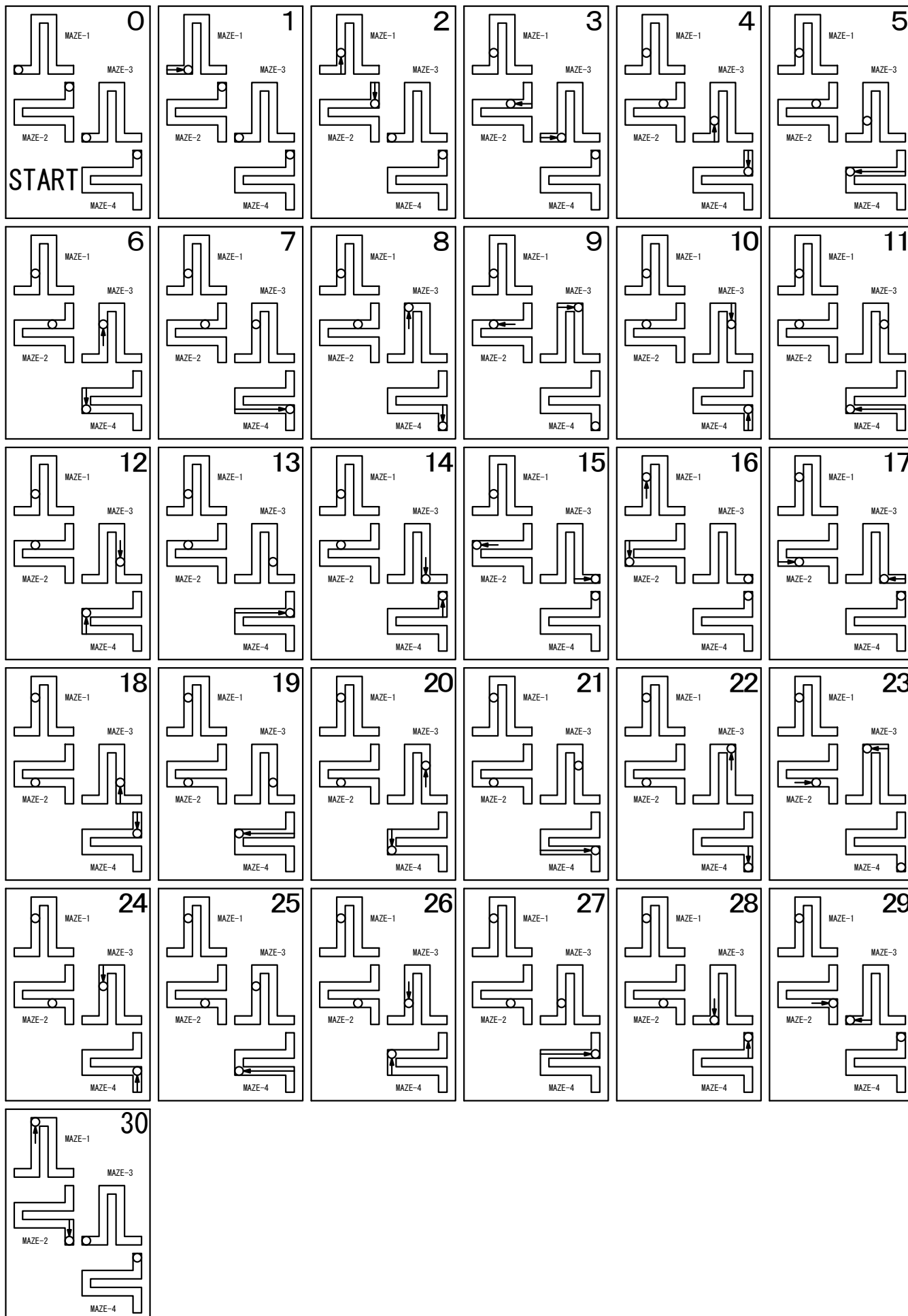
資料

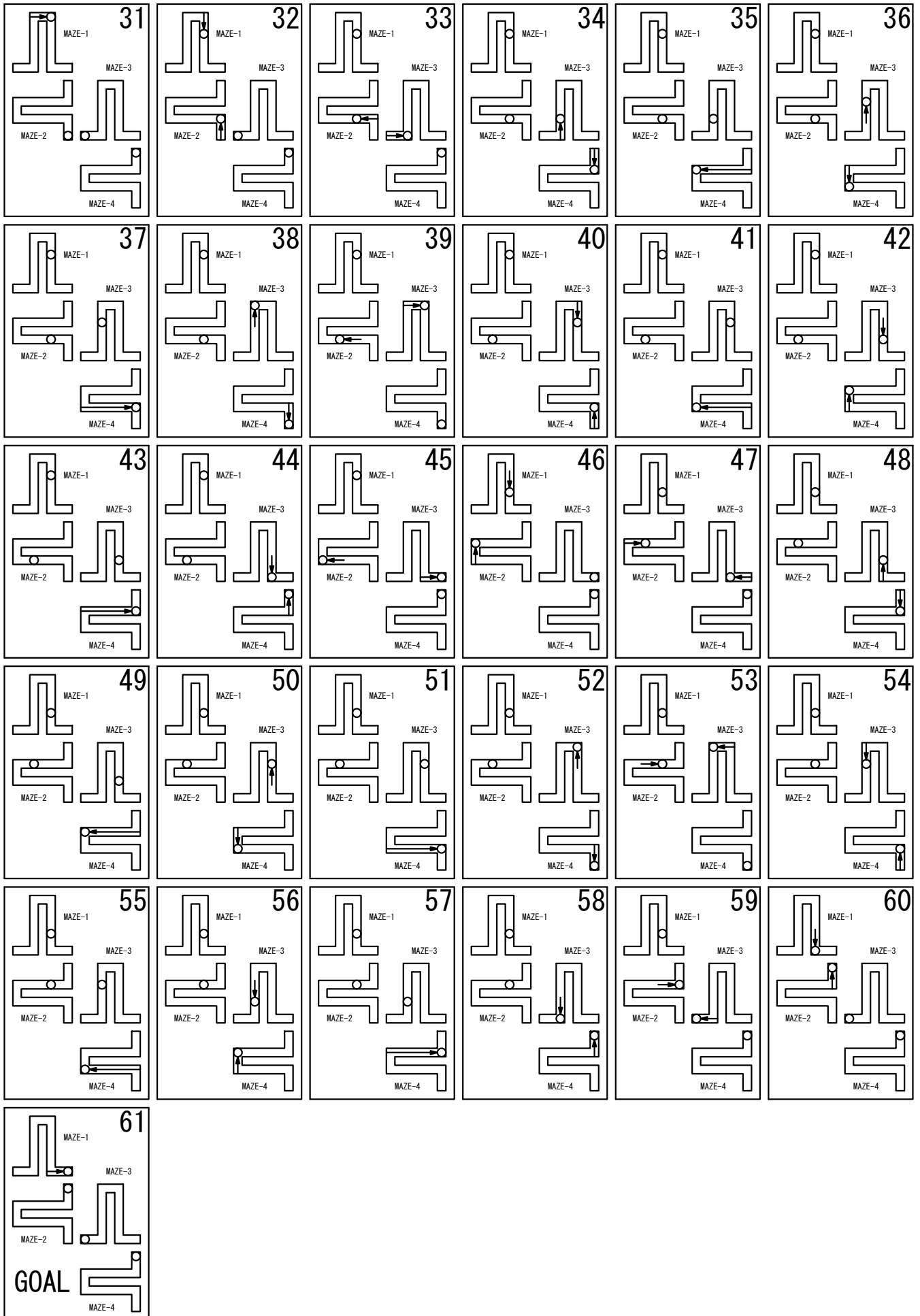
- 1、「水瓶座の引出」（RF-55）のピンの動きの全図（2ページ）
- 2、「水瓶座の引出」（RF-55）のピンの動きの全図（2ページ）
迷路の溝におけるピンの初期位置から現在位置までを黒く染めたもの。
黒く染めたのは、見易くする為。
- 3、「水瓶座の引出」（RF-55）の解答図（1ページ）
販売用の作品に付けたもの。
- 4、「水瓶座の引出2」（RF-65）の解答図（1ページ）
販売用の作品に付けたもの。
- 5、各迷路の作品の仕組み（平面図）（1ページ）
Ⅰ型迷路～Ⅴ型迷路の作品
- 6、動く仕掛の番号を並べた列（1ページ）
Ⅰ型迷路～Ⅲ型迷路の作品
- 7、ピンが各溝を1回通る際の手数（1ページ）
Ⅰ型迷路、Ⅲ型迷路の作品

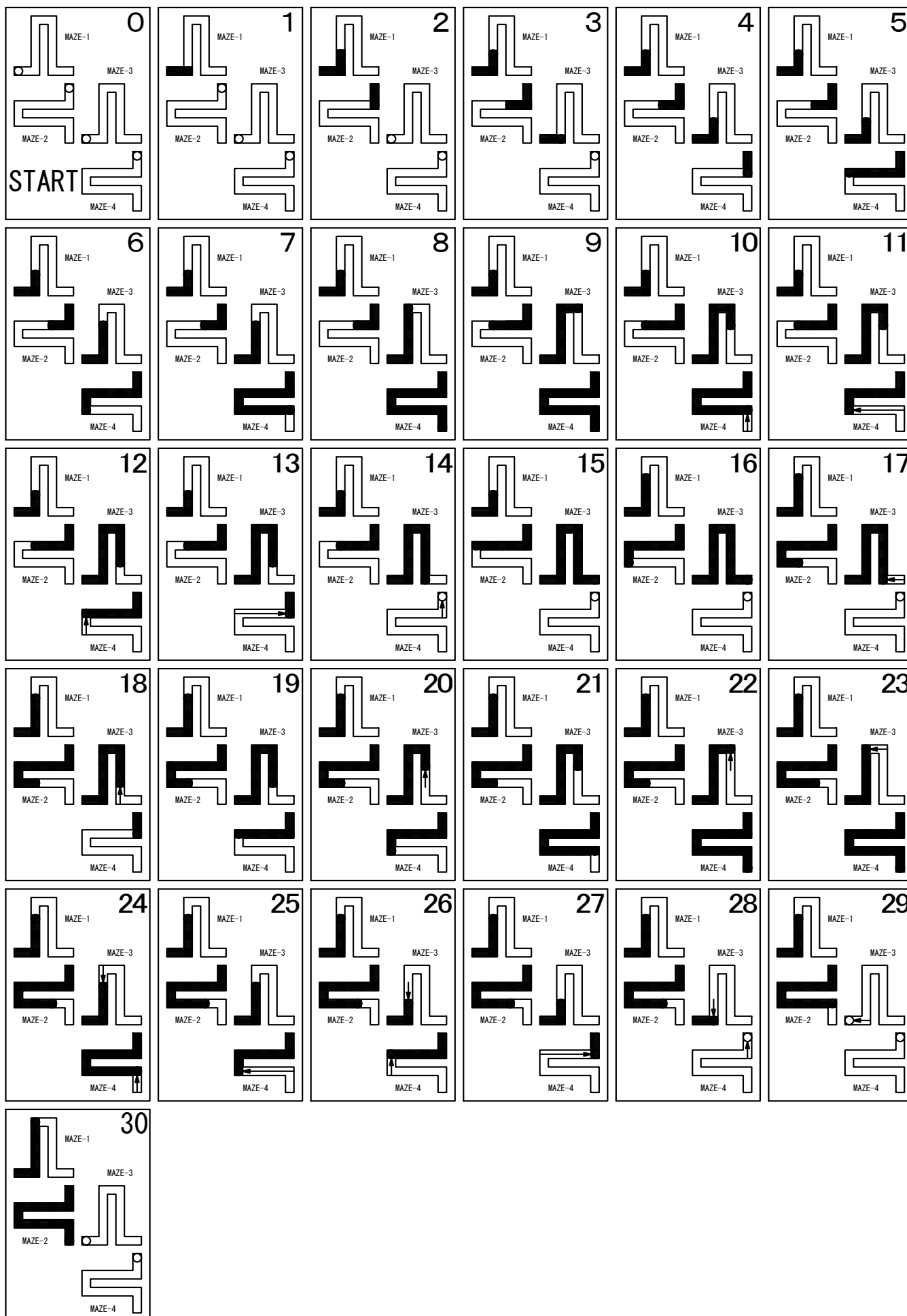
発行

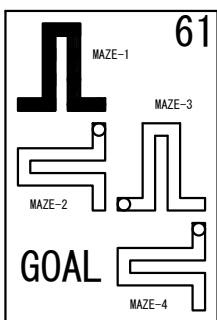
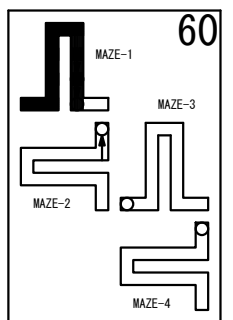
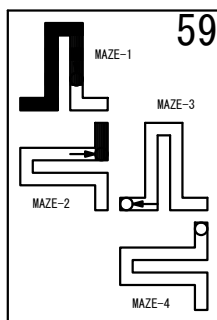
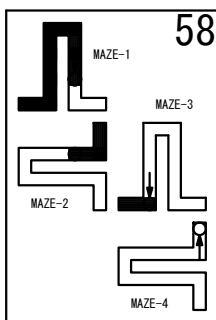
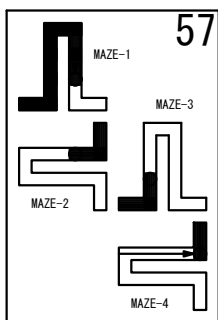
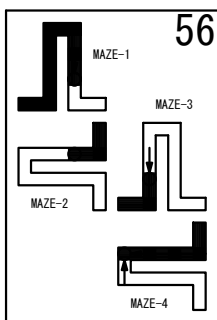
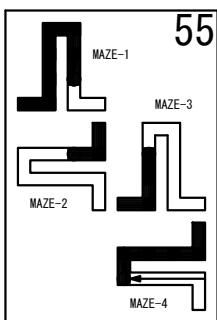
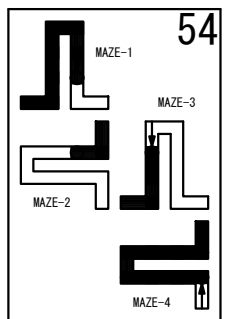
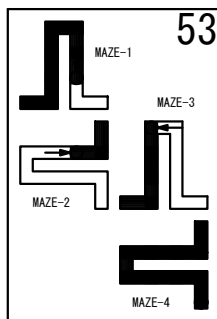
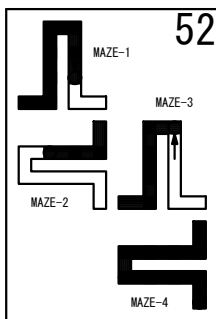
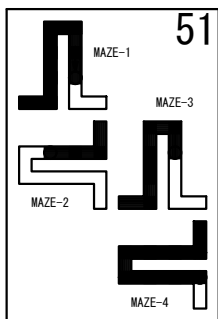
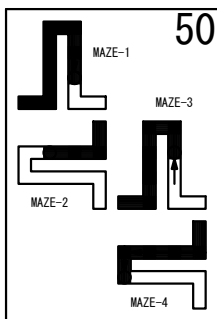
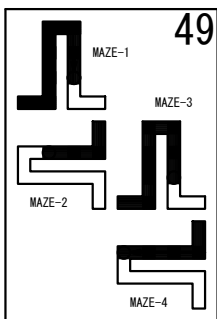
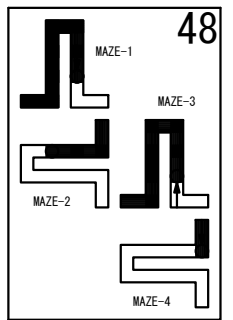
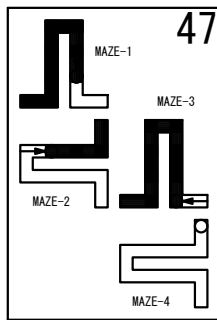
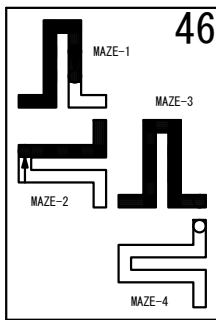
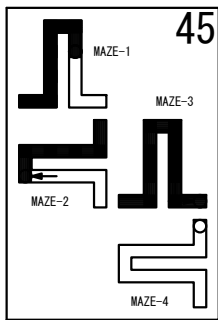
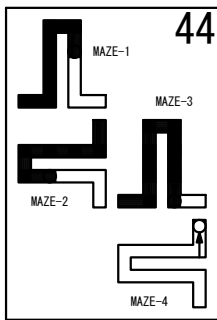
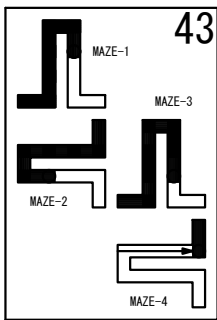
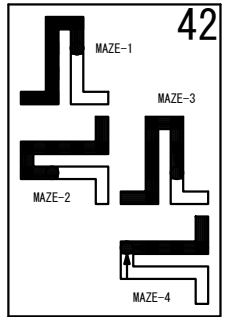
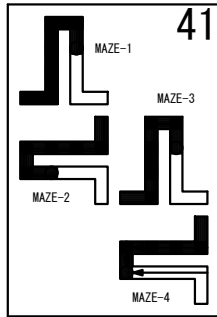
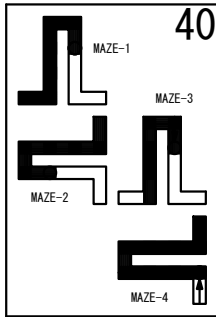
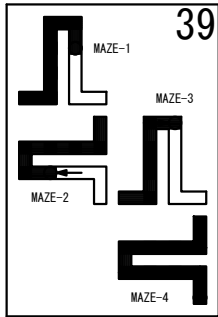
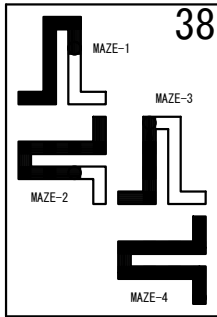
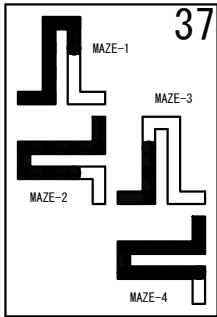
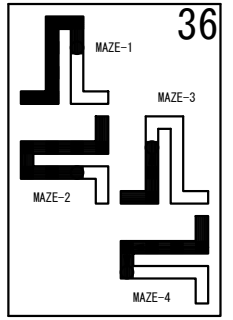
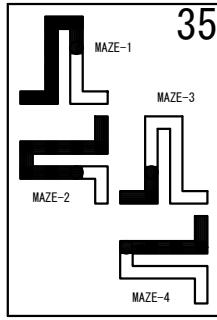
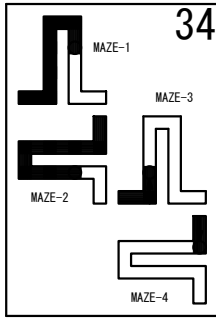
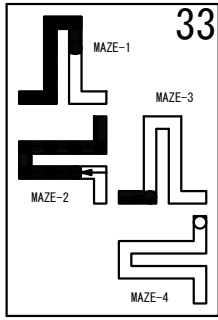
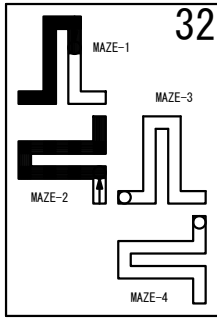
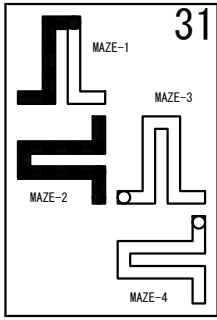
「水瓶座の引出」の手数はどう計算するか（初稿）2019年9月29日

「水瓶座の引出」の手数はどう計算するか（改訂版）2019年10月29日

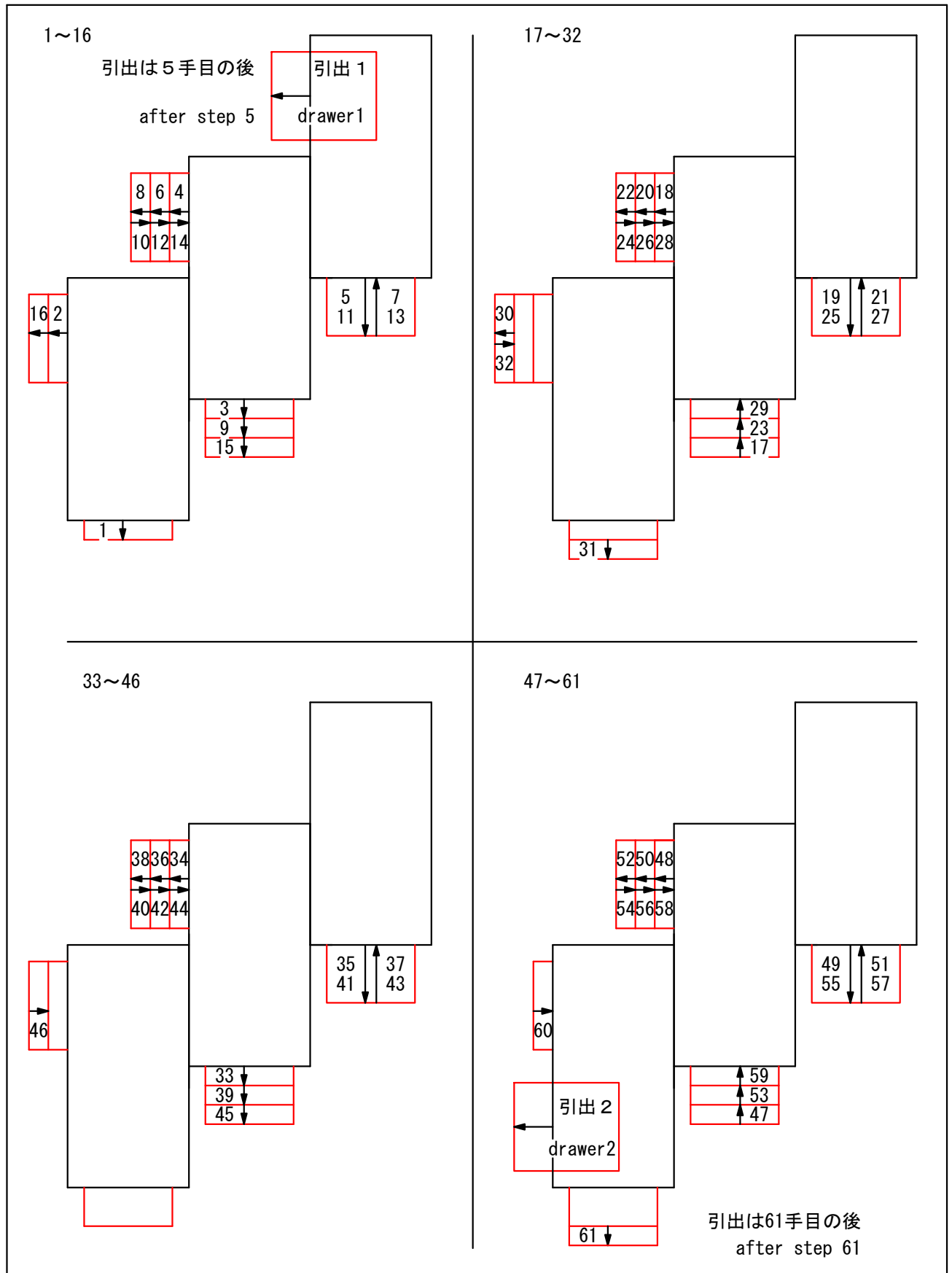


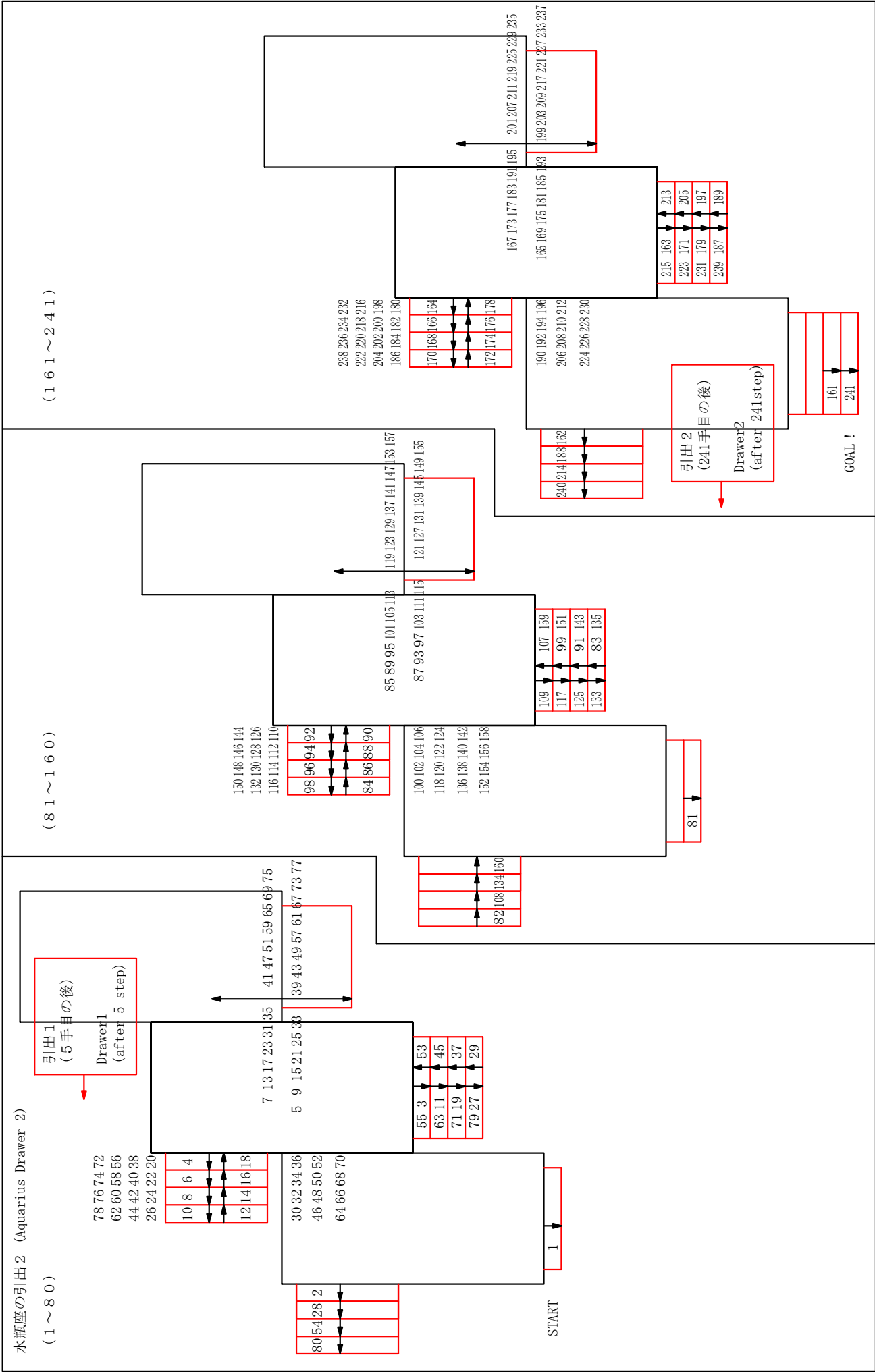






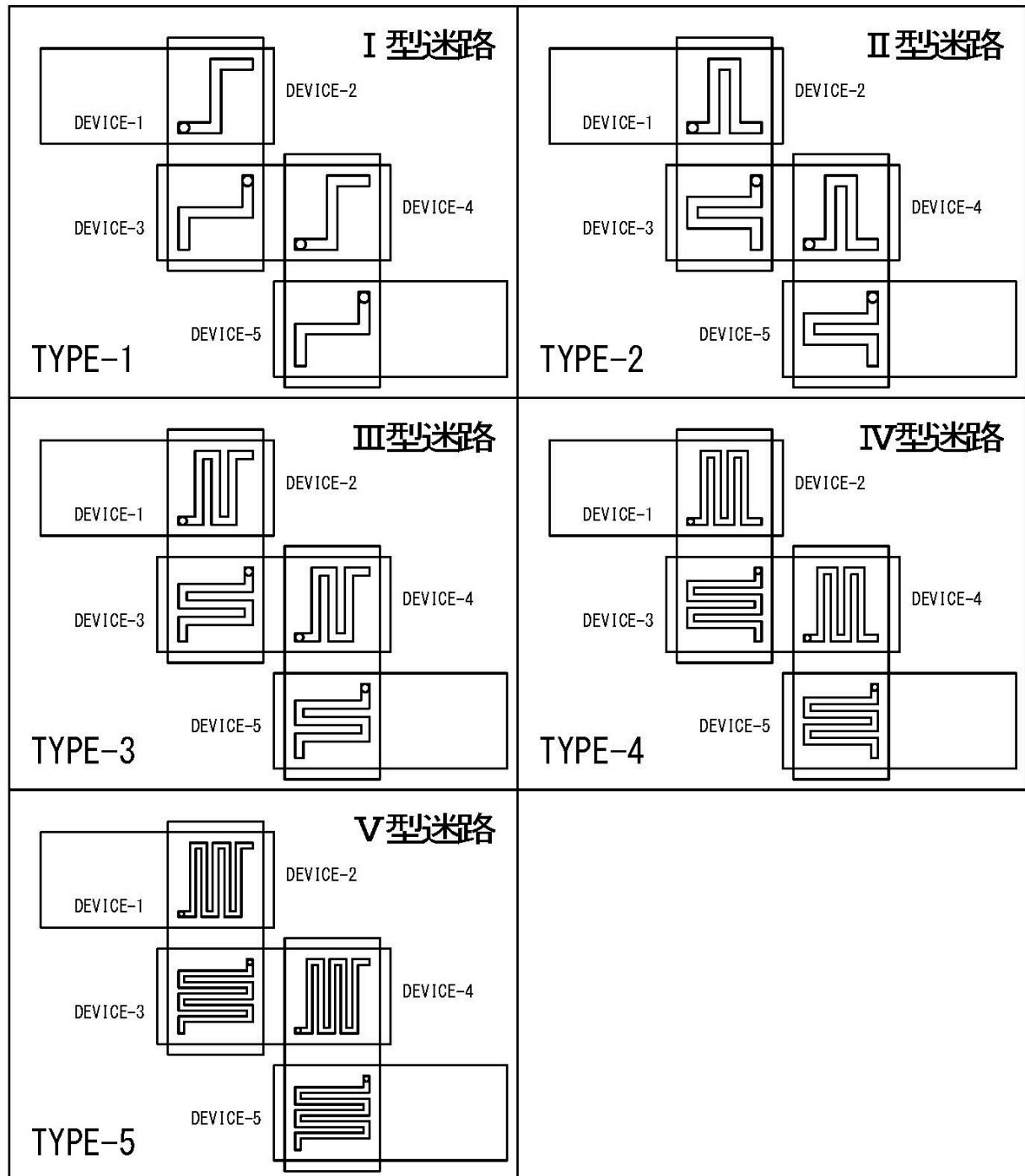
水瓶座の引出 Aquarius Drawer





各迷路の作品の仕組み（平面図）

I 型迷路から V 型迷路までの作品について、仕組みの平面図（イメージ）を示す。
仕掛の数は全て 5 つ。迷路の中のピンの位置は初期位置。



動く仕掛の番号を並べた列

ここでは、一番奥の仕掛を起点とし、仕掛の番号とは逆方向に考える。
黒は開ける操作で、赤は閉める操作。

I 型迷路で仕掛が 5 つの作品（手数は 9 手）

5,4,3,(2,1,2),3,4,5

II 型迷路で仕掛が 5 つの作品（手数は 61 手）

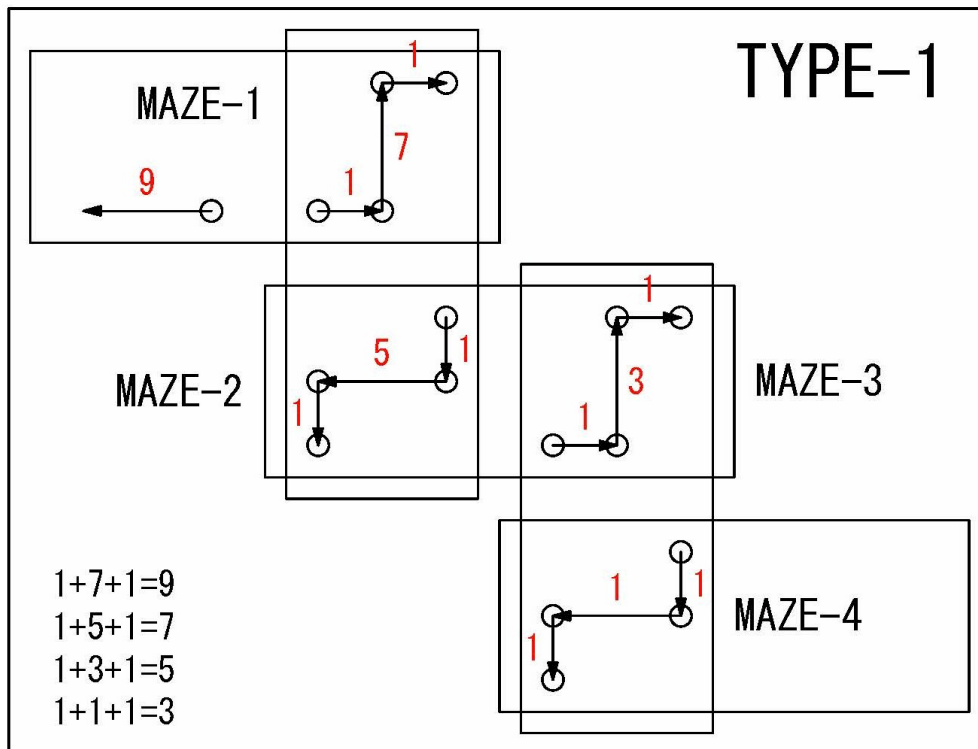
5,
4,3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3,4,3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3,4,
5,
4,3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3,4,3,(2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2),3,4,
5

III 型迷路で仕掛が 5 つの作品（手数は 241 手）

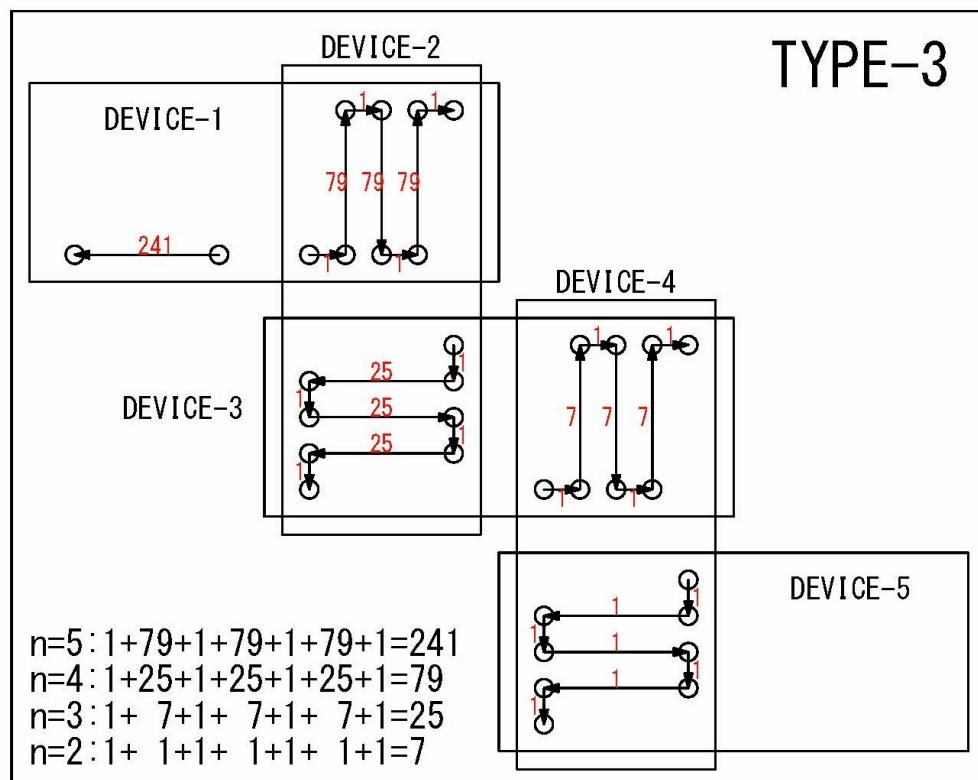
5,
4,3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,
4,3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,4,
3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,4,
5,
4,3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,
4,3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,4,
3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,4,
5,
4,3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,
4,3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,4,
3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,(2,1,2,1,2,1,2),3,4,
5

ピンが各溝を 1 回通る際の手数

I 型迷路で仕掛が 5 つの作品の場合



Ⅲ型迷路で仕掛が 5 つの作品の場合



あとがき

「水瓶座の引出」（RF-55）が完成し、手数は明らかとなったが、その裏に潜む仕組みはまだはっきりしなかった。同じⅡ型迷路を用いて、机上でつなげる仕掛の数を1個から増やしていき、架空の作品の手数を数えると、1, 5, 13, 29, 61 ... という数字が並んだ。

頑張ればその仕組みが分かりそうな、でも簡単には分からない様な…。これを解くには、実際の仕掛から考える方法と、幾つかの手数から帰納法的にと言うか、数字の上で推論する方法が考えられた。どちらを先に試みたか忘れたが、前者はなかなか骨が折れた。

この作品は奥の迷路の手数が手前の迷路の一部に反映し、その繰り返しで手数が増える。しかし実際には、その手順は整然とは並んでいない。一番手前の仕掛から出発し、途中の仕掛を少しずつ動かしてやっと一番奥に到達し、ここから手数の累積(?)が始まる。

各迷路を通る手数は、事後的・数学的にはすっきりとカウントされるが、実際の操作は幾重にも前後する。本稿の様な検討を経て、やっとその関係性が見えてくる。この瞬間が、やっと仕掛を「理解できた」と感じられる瞬間だ。作品を作った大分後のことだ。

一方、数学的な方法としては、しばらく数列を眺めてから、こんな計算を試みた。
まず、各項に3を足して4, 8, 16, 32, 64 ...、更に各項を2で割って2, 4, 8, 16, 32 ...。
するとこの一般項は 2^n らしい…。よって逆に 2^n に2をかけて3を引いて $2 \cdot 2^n - 3$ 。（解）

または、各項を2倍して2, 10, 26, 58 ...、各項に3を足して5, 13, 29, 61 ...。
すると、最初の数列がずれて現れた。よって関係式（漸化式）は $a_{n+1} = 2a_n + 3$ らしい。
この段階ではまだ推定だが、これを解いて現物と照合することで、答えが見えてくる。

「はじめに」の解答だが、Ⅱ型迷路で仕掛が10個なら計算は $2 \cdot 2^{10} - 3 = 2,045$ となる。つまり、仕掛10個の「水瓶座の引出」を作れば手数は2,045手。開けるのは大変そうだ。

いつからか数百手などの作品を作るようになり、机上ではそれ以上も考えるようになった。作品を作るたびに、また実演をするたびに、そうした作品の開け閉めを無数に繰り返し、どうやら、自分では慣れてしまったようだ。さて、お客さんはどうなのだろうか？

計算過程で驚いたことがあった。Ⅳ型、Ⅴ型迷路の解で、指数項の係数と定数項に分数が現れたのだ。作品の手数だから整数となるはず…。勿論、試した範囲では必ず整数が導かれた。これも数学のロマンか。Ⅹ型迷路の解が整数となる証明が出来るといいのだが。

単純な溝とピンで作られた作品に数学的な仕組みが隠れているのは、何とも不思議だ。本稿を通じて、皆さんにその仕組みを研究する楽しみも感じて頂ければと思う。または、本稿は「数列が何の役に立つのか！」と悩む高校生への一つの解答になるだろうか？

（追加）2019年9月の初稿発表時、手法2はまだ無かった。手法2及び重要な補強（第1章第5節、第3章第1節第6項）を追加し、全体に手を加えて本改訂版を作成した。内容的な厚みは増したと思う。皆さんは、どちらの手法がすっきりと感じられるだろうか？（以上）