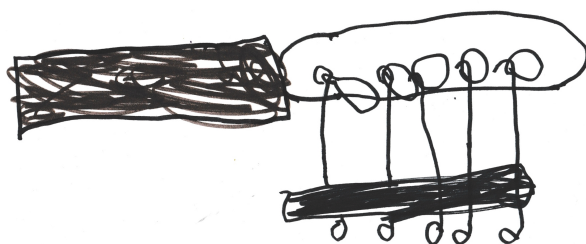


チャイニーズリングの手数を漸化式で解く



改訂版

岩原宏志

目次

はじめに

手数を表す式／手数／登場する漸化式／主な定義／図のサンプル

第1章 法則から漸化式を導く

- 第1節 「法則1」から漸化式を導く (漸化式Ⅰ、漸化式Ⅱ)
- 第2節 「法則2」から漸化式を導く (漸化式Ⅲ)
- 第3節 「法則3」から漸化式を導く (漸化式Ⅶ、漸化式Ⅷ)

第2章 漸化式を解く

- 第1節 漸化式Ⅰを解く
- 第2節 漸化式Ⅱを解く
- 第3節 漸化式Ⅲを解く (漸化式Ⅳ、漸化式Ⅴ)
- 第4節 漸化式Ⅶを解く
- 第5節 漸化式Ⅷを解く

第3章 過去に示された手法

- 第1節 Rouse Ballが示した手法
- 第2節 松田道雄が示した手法 (漸化式Ⅵ)
- 第3節 L.Grossが示した手法

第4章 補論

- 第1節 「からくり箱」の手数の数え方から
- 第2節 「法則1」が成り立つ n の下限
- 第3節 漸化式が表す意味
- 第4節 x の定義について
- 第5節 級数による表現の見え方

あとがき

はじめに

チャイニーズリングの手数を漸化式で解く

チャイニーズリングは大変古い歴史を持っているが、その研究の歴史もまた古い。松田道雄、高木茂男の論稿を読むと、その研究の歴史だけでも大変な変遷があった事が分かる。その研究の歴史は、ごく大雑把に言うと、以下の様になるようだ。

く16世紀のG.Cardano、17世紀のJ.Wallisの研究でその手数が示され、19世紀のL.Grosの研究でその数学的な仕組み（2進法との関連）が解明された。またその後同じく19世紀に、Rouse Ballは、著書においてG.Cardanoらの研究を補って手数の計算を示し、またL.Grosの研究を紹介した。>

Rouse Ballの著書"Mathematical Recreations and Essays"には、輪の動きからその手数を計算する方法が示されている。また松田道雄は、1948年の論稿でRouse Ballの説明を「要約する」として、その手法を日本に紹介した。その手法は、ある輪までが外れた状態から追加で2個ずつ輪を外す操作をして行く際に、各操作で増える手数の変化にはある規則性（法則1）がある事を示し、ここから任意の数の輪を外す手数を等比数列の和として計算するものだった。これは明快だった。

更に松田は、輪の動きの別の規則性（法則2）を取り上げた。その法則は、ある輪が自由に脱着出来る時には、それより前にある全ての輪の状態が必ずある条件を満たしているというものだ。そして松田は、この法則に従う輪の動きを元に、任意の数の輪を外す手数を数列の漸化式を用いて表現し、これを解いて手数を計算する方法を示した。この漸化式は、輪の動きの特徴を端的に表現していて、素晴らしいものだった。

ところで、これらを読む内に、どちらも漸化式を用いた別の計算が出来るように思えてきた。そして、そうした計算を整理した資料が無いものかと探してみた。あれば、漸化式の格好のテキストになるように思えた。しかし私が探した範囲では、私が思うような、その計算過程を分かり易く紹介する様な資料は見つからなかった。そこで、自分で計算を試みた。するとその中で、他にも導かれる漸化式が出て来た。それらを整理し、また幾つかの補論を加えることで、本稿が出来た。

過去の研究によって、チャイニーズリングの手数の計算式は明確に示されている。今となっては、これを使うことで簡単に手数を求めることが出来る。しかし、この式を見て「そうなのか」と流してしまっただけではもったいない。この研究を「はるか昔に完成した、終わったもの」と考えてはもったいない。自分で輪の動きを確かめ、手数を導いてみれば、チャイニーズリングを更に深く楽しむことが出来るはず。幸いこの計算は、高校までの数学で挑戦出来る。どうぞ、お試し頂きたい。

以上

<手数を表す式>

n個の輪を持つチャイニーズリングを解く手数 a_n は以下の計算式で表される。

$$a_n = \frac{1}{3}2^{n+1} - \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (1)$$

nが奇数の場合と偶数の場合とに分けると、 a_n はそれぞれ以下のように表される。

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 1}{3} \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 2}{3} \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (3)$$

<手数>

輪の数が1個の場合から10個の場合までの手数は以下の様になる。

(1)～(3)にnの値を代入することで任意の輪の数nの場合の手数を求めることが出来る。

$a_1 = 1$	$a_6 = 42$
$a_2 = 2$	$a_7 = 85$
$a_3 = 5$	$a_8 = 170$
$a_4 = 10$	$a_9 = 341$
$a_5 = 21$	$a_{10} = 682$

＜登場する漸化式＞

漸化式Ⅰ	$a_{n+4} - a_{n+2} = 4(a_{n+2} - a_n)$	「法則 1」から導かれる
漸化式Ⅱ	$a_{n+2} = a_n + 2^{n+1}$	「法則 1」から導かれる
漸化式Ⅲ	$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0$	「法則 2」から導かれる
漸化式Ⅳ	$a_{n+1} + a_n + 1 = 2^{n+1}$	漸化式Ⅲを解く過程で導かれる
漸化式Ⅴ	$a_{n+1} - 2a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-1)^n$	漸化式Ⅲを解く過程で導かれる
漸化式Ⅵ	$a_{n+3} - a_{n+1} = 2(a_{n+2} - a_n)$	松田道雄が示した手法に現れる
漸化式Ⅶ	$a_{n+2} = 4a_n + 1 \ (n = 1, 3, 5 \dots)$	「法則 3」から導かれる
漸化式Ⅷ	$a_{n+2} = 4a_n + 2 \ (n = 2, 4, 6 \dots)$	「法則 3」から導かれる

＜主な定義＞

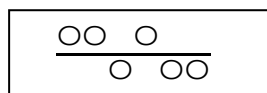
本稿に共通する主な定義は以下。詳細な定義は各ページで示す。

最初に外れる輪から順番に 1 番、2 番...とし、任意の番号の輪を n 番とする。

数列 a_n は 1 番から n 番までの輪を外す手数を表す。

数列 x_n は 1 番から n 番まで輪が外れた状態から追加で 2 個外した時に増える手数を表す。

＜図のサンプル＞



図はチャイニーズリングの状態を模式的に表したもの。最初に外れる 1 番の輪が右側。線が柄を表し、線より上の○は柄にかかっている輪を、線より下の○は柄から外れている輪を表す。

第1章 法則から漸化式を導く

第1節 「法則1」から漸化式を導く(1/3)

図1を用いて、輪の動きから「法則1」を読み取る。移行は最少手数とする。

法則1：②→③の手数は①→②の手数の4倍

<図1の説明>

図1はチャイニーズリングが外れていく様子を表している。

図1の各段の6つの○は、左からn+4番、n+3番、n+2番、n+1番、n番、n-1番を表す。

「…」は輪が続く意味。左の「…」は輪が全てかかっており、右の「…」は全て外れている。

<状態①～③の定義>

以下の3つの状態を定義する。指定より大きい番号の輪は全てかかっているものとする。

①→②、②→③と、それぞれ輪が2個ずつ外れて行く様子を表す。

<図1から一部抜粋>

… $\frac{\text{○○○○}}{\text{○○}}$ …	①：1番からn番までの輪が外れている状態
… $\frac{\text{○○}}{\text{○○○○}}$ …	②：1番からn+2番までの輪が外れている状態
… $\frac{\text{○○○○○○}}{\text{○○○○○○}}$ …	③：1番からn+4番までの輪が外れている状態

<状態④、⑤の定義>

更に以下の2つの状態を定義し「④と⑤の入れ替え」を行う操作を考える。

●を含めて指定より大きい番号の輪の状態は、この操作の手順・手数に影響がなく無視する。

ただしこの過程で、●の輪については、一切操作が行われないものとする。

この操作を1つのかたまりとして認識すると、図1の各過程の手数が数え易くなる。

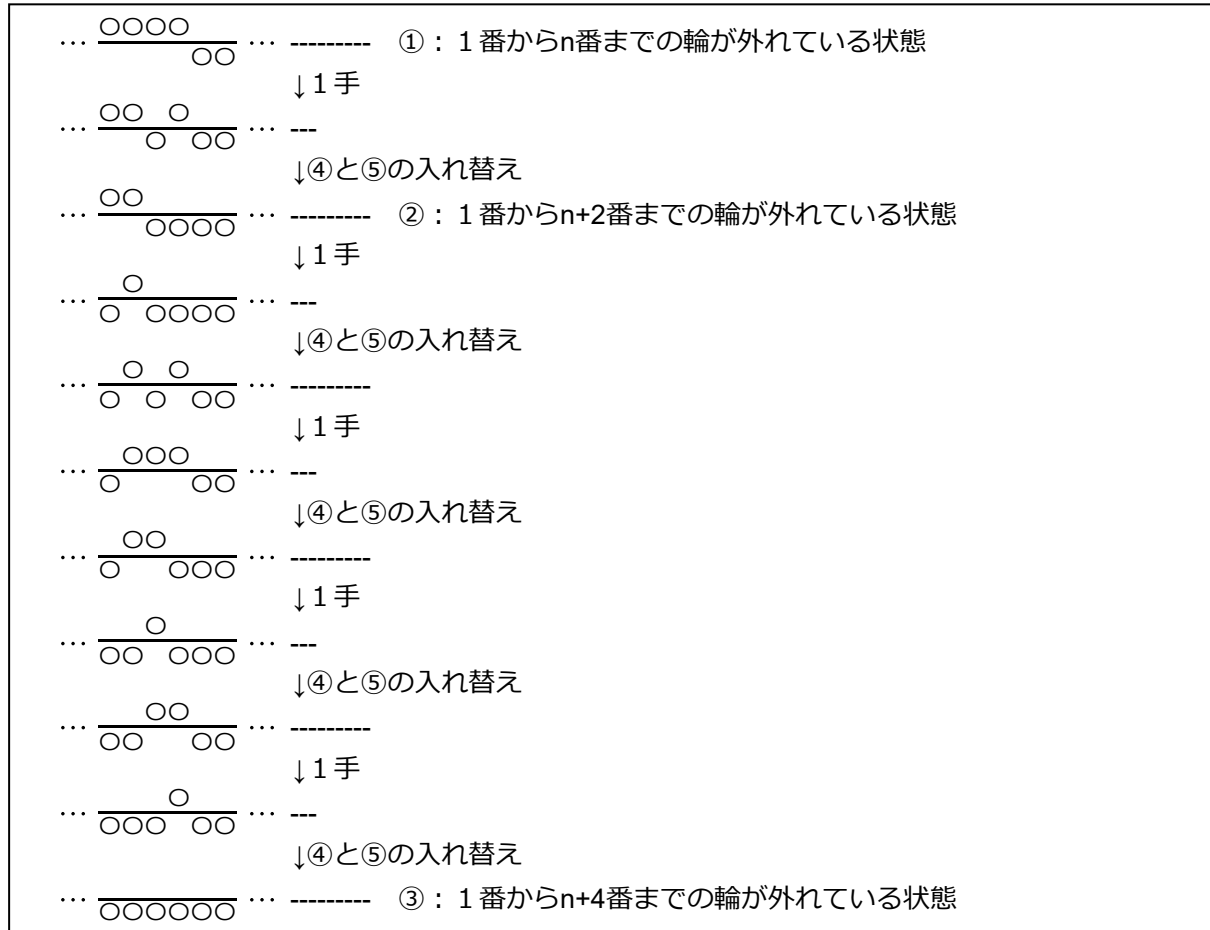
<図1から一部抜粋>

… $\frac{\text{○}}{\text{●●●○○}}$ …	④：1番からn番までの輪が外れていてn+1番の輪がかかっている状態
… $\frac{\text{●●●○○○}}{\text{○○○○}}$ …	⑤：1番からn+1番までの輪が全て外れている状態

第1章 法則から漸化式を導く

第1節 「法則1」から漸化式を導く(2/3)

<図1>



<図1から「法則1」を確認する>

図1を見ると、各段の間の手数は1手と「④と⑤の入れ替え」の手数が交互になっている。

「④と⑤の入れ替え」は④→⑤と⑤→④が混ざっているが、当然手数は等しい。

①から数え始める。1手動かして「④と⑤の入れ替え」を行うと②に至る。

②からは、「1手動かして『④と⑤の入れ替え』」を合計4回行くと③に至る。

以上から「②→③の手数は①→②の手数の4倍」となる様子（法則1）が確認できた。

第1章 法則から漸化式を導く

第1節 「法則1」から漸化式を導く(3/3)

「法則1」を確認することが出来たので、次はこれを漸化式を用いて表現する。

<数列 a_n の定義>

1番から任意の番号までの輪を外す手数を数列を用いて以下の様に定義する。

a_n : 1番から n 番までの輪を外す手数 (全ての輪がかかっている状態から①への手数)

a_{n+2} : 1番から $n+2$ 番までの輪を外す手数 (全ての輪がかかっている状態から②への手数)

a_{n+4} : 1番から $n+4$ 番までの輪を外す手数 (全ての輪がかかっている状態から③への手数)

<漸化式Iを導く>

①から②へ移行する手数は数列 a_n を用いて以下の様に表せる。

$$a_{n+2} - a_n \quad (1)$$

②から③へ移行する手数は数列 a_n を用いて以下の様に表せる。

$$a_{n+4} - a_{n+2} \quad (2)$$

「法則1」より「②→③の手数は①→②の手数の4倍」だから、以下の漸化式が導かれる。

漸化式I	$a_{n+4} - a_{n+2} = 4(a_{n+2} - a_n)$	(3)
------	--	-----

(3)は「法則1」を表す。これを解いて一般項 a_n を求めることが出来る。

<数列 x_n の定義>

各状態の間で移行する手数を数列を用いて以下の様に定義する。

x_n : ①から②へ移行する手数

x_{n+2} : ②から③へ移行する手数

<漸化式IIを導く>

a_n と x_n の関係は以下の様に表せる。

$$x_n = a_{n+2} - a_n \quad (4)$$

$$x_{n+2} = a_{n+4} - a_{n+2} \quad (5)$$

(4)、(5)を(3)に代入すると、以下の式が導かれる。これは「法則1」を直接表したものでもある。

$$x_{n+2} = 4x_n \quad (6)$$

(6)を解くと、 x_n の一般項が以下の様に求められる。(「漸化式IIを解く」を参照)

$$x_n = 2^{n+1} \quad (7)$$

(7)を(4)に代入して整理することで以下の漸化式が導かれる。

漸化式II	$a_{n+2} = a_n + 2^{n+1}$	(8)
-------	---------------------------	-----

これを解いて一般項 a_n を求めることが出来る。

第1章 法則から漸化式を導く

第2節 「法則2」から漸化式を導く

図2を用いて、「法則2」に従う輪の動きから漸化式を導く。

「法則2」は、チャイニーズリングを注意しながら動かすと、気付くことが出来る。

法則2：「 $n+2$ 番の輪が自由に脱着できる」のは、以下を満たす時のみ。
「 $n+1$ 番の輪がかかっている、1番から n 番の輪が外れている」

(両者は必要十分条件)

<図2の説明>

図2の各段の5つの○は、左から $n+2$ 番、 $n+1$ 番、 n 番、 $n-1$ 番、...、1番を表す。

「...」は輪が続く意味。輪の状態はこれを挟む左右の輪と同じとする。

<数列 a_n の定義>

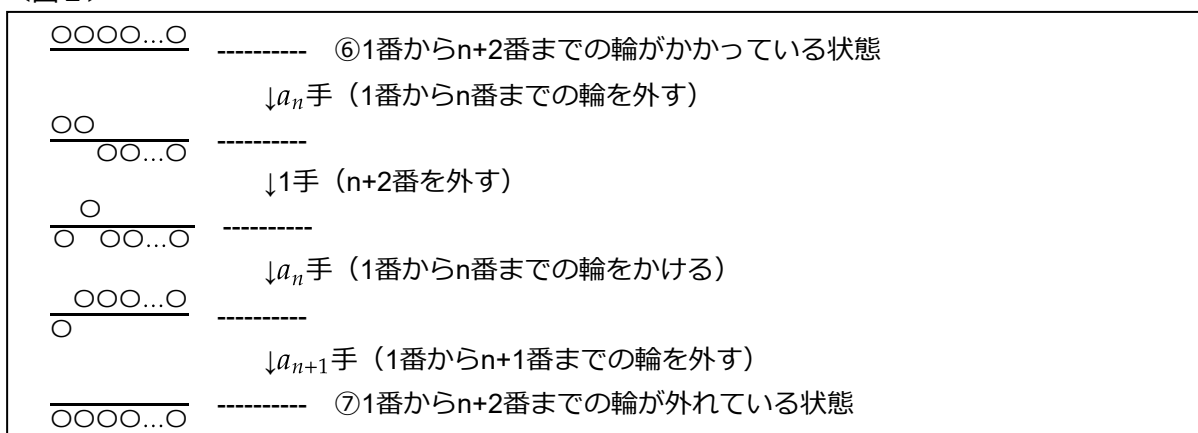
1個から任意の数までの輪を外す手数を数列を用いて以下の様に定義する。

a_{n+2} ：1個から $n+2$ 個までの輪を外す手数（図2の⑥から⑦への手数）

a_{n+1} ：1個から $n+1$ 個までの輪を外す手数

a_n ：1個から n 個までの輪を外す手数

<図2>



指定より大きい番号の輪の状態はこの操作の手順・手数に影響がなく無視する。（操作しない）

<図2から漸化式Ⅲを導く>

図2では、各操作の手数を数列で表しており、合計することで漸化式が出来る。

つまり $a_{n+2} = a_n + 1 + a_n + a_{n+1}$ となり、これを整理し、以下の漸化式が得られる。

漸化式Ⅲ	$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0$	(1)
------	------------------------------------	-----

これを解いて一般項 a_n を求めることが出来る。

第1章 法則から漸化式を導く

第3節 「法則3」から漸化式を導く(1/2)

輪の動きから「法則3」を読み取る。

法則3： n が奇数の時 a_{n+1} は a_n の2倍、 n が偶数の時 a_{n+1} は a_n の2倍+1

輪の数 n における手数は $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 10, a_5 = 21, a_6 = 42 \dots$ となる。
これらから n が隣り合う手数同士を比較して、以下の関係＝「法則3」が読み取れる。

<nが奇数の場合> $a_1 = 1, a_2 = 2$より$a_2 = 2a_1$ $a_3 = 5, a_4 = 10$より$a_4 = 2a_3$ $a_5 = 21, a_6 = 42$より$a_6 = 2a_5 \quad \dots$	<nが偶数の場合> $a_2 = 2, a_3 = 5$より$a_3 = 2a_2 + 1$ $a_4 = 10, a_5 = 21$より$a_5 = 2a_4 + 1$ $a_6 = 42, a_7 = 85$より$a_7 = 2a_6 + 1 \quad \dots$
--	---

(ただし厳密には、この法則はこの段階では帰納法的な予測に過ぎない。次でその正しさを確認するが、本来は輪の動きから法則3を導きたい。)

「法則3」から漸化式を導く。 n が奇数の場合と偶数の場合に分けて考える。

< n が奇数の時>「法則3」は「 a_{n+1} は a_n の2倍、 a_{n+2} は a_{n+1} の2倍+1」と言い換えられる。
これを数式で表すと「 $a_{n+1} = 2a_n$ かつ $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 1$ 」となる。
これらの2つの式を満たしつつ、 a_{n+1} を消去した漸化式を作することを考える。※
すると、 $a_{n+1} = 2a_n$ を $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 1$ に代入することで以下の漸化式が得られる。

漸化式VII	$a_{n+2} = 4a_n + 1 \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$	(1)
--------	--	-----

これを解いて一般項 a_n を求めることが出来る。

< n が偶数の時>「法則3」は「 a_{n+1} は a_n の2倍+1、 a_{n+2} は a_{n+1} の2倍」と言い換えられる。
これを数式で表すと「 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ かつ $a_{n+2} = 2a_{n+1}$ 」となる。
これらの2つの式を満たしつつ、 a_{n+1} を消去した漸化式を作することを考える。※
すると、 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ を $a_{n+2} = 2a_{n+1}$ に代入することで以下の漸化式が得られる。

漸化式VIII	$a_{n+2} = 4a_n + 2 \quad (n = 2, 4, 6 \dots)$	(2)
---------	--	-----

これを解いて一般項 a_n を求めることが出来る。

※ n が奇数の場合と偶数の場合とで「法則3」における各項の関係は異なる。
よって、 n が奇数の場合と偶数の場合とで、場合分けをして計算することを考えた。
なるべく簡単なものとして、それぞれ、 a_n と a_{n+2} による漸化式が出来ればよい。
以上から、奇数項だけの漸化式(1)と、偶数項だけの漸化式(2)を作った。

第1章 法則から漸化式を導く

第3節 「法則3」から漸化式を導く(2/2)

<「法則1」から「法則3」を確認する>

Rouse Ballは著書において、本稿で言う「法則1」から、手数を級数によって示した。

(「Rouse Ballが示した手法」を参照)

この方法を用いて、 a_n と a_{n+1} の関係を表す式を導き、「法則3」が成り立つことを示す。

n が奇数の時、 $n = 2p - 1$ とおくと $n + 1 = 2p$ となり、以下の様に表せる。 $(p = 1, 2, 3 \dots)$

$$a_n = a_{2p-1} = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{p-1} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = a_{2p} = 2 + (2 \times 4) + (2 \times 4^2) + \dots + (2 \times 4^{p-1}) \quad (2)$$

(2)を変形すると $a_{2p} = 2(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{p-1}) = 2a_{2p-1}$ となる。

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (3)$$

n が偶数の時、 $n = 2q$ とおくと $n + 1 = 2q + 1$ となり、以下の様に表せる。 $(q = 1, 2, 3 \dots)$

$$a_n = a_{2q} = 2 + (2 \times 4) + (2 \times 4^2) + \dots + (2 \times 4^{q-1}) \quad (4)$$

$$a_{n+1} = a_{2q+1} = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^q \quad (5)$$

(4)を変形すると $a_{2q} = 2(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{q-1})$ となる。

(5)を変形すると $a_{2q+1} = 1 + 2 \times 2(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{q-1}) = 1 + 2a_{2q}$ となる。

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (6)$$

(3)、(6)より「 n が奇数の時 a_{n+1} は a_n の2倍、 n が偶数の時 a_{n+1} は a_n の2倍+1」となる。

つまり、「法則3」が成り立つ。

<漸化式Ⅶ・Ⅷを導く過程より導かれる別の漸化式>

ところで、漸化式Ⅶ・漸化式Ⅷを導く過程より、別の漸化式を求めることも出来る。

n が奇数の時、「法則3」は「 $a_{n+1} = 2a_n$ かつ $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 1$ 」と表された。

これらの2つの式の両辺を足して整理すると、以下の漸化式が得られる。

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0 \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (7)$$

n が偶数の時、「法則3」は「 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ かつ $a_{n+2} = 2a_{n+1}$ 」と表された。

これらの2つの式の両辺を足して整理すると、以下の漸化式が得られる。

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0 \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (8)$$

(7)、(8)の数式は等しくなった。よって整理して以下の漸化式が得られる。

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0 \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (9)$$

これは漸化式Ⅲと等しい。

第2章 漸化式を解く

第1節 漸化式 I を解く(1/2) 輪の数が奇数の場合

$$a_{n+4} - a_{n+2} = 4(a_{n+2} - a_n) \quad (1)$$

$n = 2k - 1$ ($k = 1, 2, 3 \dots$) とおき、これを(1)に代入する。

$$a_{2k+3} - a_{2k+1} = 4(a_{2k+1} - a_{2k-1}) \quad (2)$$

$b_k = a_{2k+1} - a_{2k-1}$ とおくと $b_{k+1} = a_{2k+3} - a_{2k+1}$ となり、(2)に代入すると

$$b_{k+1} = 4b_k \quad (3)$$

$b_1 = a_3 - a_1 = 4$ より、 b_k は初項4、公比4の等比数列なので $b_k = 4 \cdot 4^{k-1} = 4^k$

$$\therefore a_{2k+1} = a_{2k-1} + 4^k \quad (4)$$

(4)の両辺を 4^k で割る (指数項の消去)

$$\frac{1}{4^k} a_{2k+1} = \frac{1}{4^k} a_{2k-1} + 1 \quad (5)$$

$c_k = \frac{1}{4^k} a_{2k-1}$ とおくと $c_{k+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^k} a_{2k+1}$ 、 $\frac{1}{4^k} a_{2k+1} = 4c_{k+1}$ となり、(5)に代入し整理すると

$$c_{k+1} = \frac{1}{4} c_k + \frac{1}{4} \quad (6)$$

α を定数とし、(6)を以下の形で表せるものとする。

$$c_{k+1} - \alpha = \frac{1}{4}(c_k - \alpha) \quad (7)$$

(7)を展開して(6)と係数を比較し解くと $\alpha = \frac{1}{3}$ が得られ、(6)は以下の様に変形できる。

$$c_{k+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left(c_k - \frac{1}{3} \right) \quad (8)$$

$d_k = c_k - \frac{1}{3}$ とおくと $d_{k+1} = c_{k+1} - \frac{1}{3}$ となり、(8)に代入すると

$$d_{k+1} = \frac{1}{4} d_k \quad (9)$$

$d_1 = c_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} a_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$ より、 d_k は初項 $-\frac{1}{12}$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列

$$\therefore d_k = -\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k} \quad (10)$$

よって $c_k = d_k + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k} + \frac{1}{3}$ 、更に $a_{2k-1} = c_k \cdot 4^k = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k} \cdot 4^k + \frac{1}{3} 4^k = \frac{2^{2k}-1}{3}$

$n = 2k - 1$ 、 $2k = n + 1$ を代入して、 n が奇数の場合の a_n は以下の様に表せる。

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 1}{3} \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (11)$$

第2章 漸化式を解く

第1節 漸化式 I を解く(2/2) 輪の数が偶数の場合

$$a_{n+4} - a_{n+2} = 4(a_{n+2} - a_n) \quad (1)$$

$n = 2k$ ($k = 1, 2, 3 \dots$) とおき、これを(1)に代入する。

$$a_{2k+4} - a_{2k+2} = 4(a_{2k+2} - a_{2k}) \quad (2)$$

$b_k = a_{2k+2} - a_{2k}$ とおくと $b_{k+1} = a_{2k+4} - a_{2k+2}$ となり、(2)に代入すると

$$b_{k+1} = 4b_k \quad (3)$$

$b_1 = a_4 - a_2 = 8$ より、 b_k は初項8、公比4の等比数列なので $b_k = 8 \cdot 4^{k-1} = 2 \cdot 4^k$

$$\therefore a_{2k+2} = a_{2k} + 2 \cdot 4^k \quad (4)$$

(4)の両辺を 4^k で割る(指数項の消去)

$$\frac{1}{4^k} a_{2k+2} = \frac{1}{4^k} a_{2k} + 2 \quad (5)$$

$c_k = \frac{1}{4^k} a_{2k}$ とおくと $c_{k+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^k} a_{2k+2}$ 、 $\frac{1}{4^k} a_{2k+2} = 4c_{k+1}$ となり、(5)に代入し整理すると

$$c_{k+1} = \frac{1}{4} c_k + \frac{1}{2} \quad (6)$$

α を定数とし、(6)を以下の形で表せるものとする。

$$c_{k+1} - \alpha = \frac{1}{4}(c_k - \alpha) \quad (7)$$

(7)を展開して(6)と係数を比較し解くと $\alpha = \frac{2}{3}$ が得られ、(6)は以下の様に変形できる。

$$c_{k+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \left(c_k - \frac{2}{3} \right) \quad (8)$$

$d_k = c_k - \frac{2}{3}$ とおくと $d_{k+1} = c_{k+1} - \frac{2}{3}$ となり、(8)に代入すると

$$d_{k+1} = \frac{1}{4} d_k \quad (9)$$

$d_1 = c_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} a_2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ より、 d_k は初項 $-\frac{1}{6}$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列

$$\therefore d_k = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^k} \quad (10)$$

よって $c_k = d_k + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^k} + \frac{2}{3}$ 、更に $a_{2k} = c_k \cdot 4^k = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^k} \cdot 4^k + \frac{2}{3} 4^k = \frac{2^{2k+1}-2}{3}$

$n = 2k$ を代入して、 n が偶数の場合の a_n は以下の様に表せる。

$$a_n = \frac{2^{n+1}-2}{3} \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (11)$$

第2章 漸化式を解く

第2節 漸化式Ⅱを解く(1/3) x_n の式を解いて漸化式Ⅱを導く

以下の漸化式から x_n の一般項を求める。 n が奇数と偶数の場合に分けて考える。

$$x_{n+2} = 4x_n \quad (1)$$

< n が奇数の場合>

$n = 2k - 1 (k = 1, 2, 3 \dots)$ とおき、(1)に代入すると $x_{(2k-1)+2} = 4x_{2k-1}$ となり、整理して

$$x_{2k+1} = 4x_{2k-1} \quad (2)$$

$z_k = x_{2k-1}$ とおくと、 $z_{k+1} = x_{2(k+1)-1} = x_{2k+2-1} = x_{2k+1}$ より、(2)に代入して

$$z_{k+1} = 4z_k \quad (3)$$

$z_1 = x_{2 \cdot 1 - 1} = x_1 = 4$ より、 z_k は初項4、公比4の等比数列

$$\therefore z_k = 4 \cdot 4^{k-1} = 4^k \quad (4)$$

(x_1 は1番だけ外れた状態から3番まで外れた状態への手数を表し、数えて得る。)

よって $x_{2k-1} = 4^k = 2^{2k}$ 、また $n = 2k - 1$ より $2k = n + 1$ を代入して

$$x_n = 2^{n+1} (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (5)$$

< n が偶数の場合>

$n = 2k (k = 1, 2, 3 \dots)$ とおき、これを(1)に代入すると

$$x_{2k+2} = 4x_{2k} \quad (6)$$

$z_k = x_{2k}$ とおくと、 $z_{k+1} = x_{2(k+1)} = x_{2k+2}$ より、(6)に代入して

$$z_{k+1} = 4z_k \quad (7)$$

$z_1 = x_2 = 8$ より、 z_k は初項8、公比4の等比数列

$$\therefore z_k = 8 \cdot 4^{k-1} = 2 \cdot 4^k \quad (8)$$

(x_2 は2番まで外れた状態から4番まで外れた状態への手数を表し、数えて得る。)

よって $x_{2k} = 2 \cdot 4^k = 2 \cdot 2^{2k}$ 、また $n = 2k$ を代入して

$$x_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (9)$$

< $n = 1, 2, 3 \dots$ の場合>

n が奇数の場合の一般項(5)と、 n が偶数の場合の一般項(9)が一致した。

よって、 x_n の一般項は以下の様に表せる。

$$x_n = 2^{n+1} (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (10)$$

(10)を $x_n = a_{n+2} - a_n$ に代入すると $a_{n+2} - a_n = 2^{n+1}$ となり、以下の式が求められる。

漸化式Ⅱ	$a_{n+2} = a_n + 2^{n+1}$	(11)
------	---------------------------	------

これを解いて一般項 a_n を求めることが出来る。

第2章 漸化式を解く

第2節 漸化式Ⅱを解く(2/3)

以下の漸化式を解いて一般項を求める。

$$a_{n+2} = a_n + 2^{n+1} \quad (1)$$

(1)の両辺を 2^n で割る（指数項の消去）

$$\frac{1}{2^n}a_{n+2} = \frac{1}{2^n}a_n + 2 \quad (2)$$

$b_n = \frac{1}{2^n}a_n$ とおくと、 $b_{n+2} = \frac{1}{2^{n+2}}a_{n+2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n}a_{n+2}$ 、 $\frac{1}{2^n}a_{n+2} = 4b_{n+2}$ となり、(2)に代入して

$$4b_{n+2} = b_n + 2, \quad b_{n+2} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2} \quad (3)$$

α を定数とし、(3)を以下の形で表せるものとする。

$$b_{n+2} - \alpha = \frac{1}{4}(b_n - \alpha) \quad (4)$$

(4)を展開して(3)と係数を比較し解くと $\alpha = \frac{2}{3}$ が得られ、(3)は以下の様に変形できる。

$$b_{n+2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(b_n - \frac{2}{3}\right) \quad (5)$$

ここから n が奇数の場合と偶数の場合とに分けて考える。（次のページに続く）

第2章 漸化式を解く

第2節 漸化式Ⅱを解く(3/3)

<nが奇数の場合>

$n = 2k - 1 (k = 1, 2, 3 \dots)$ とおき、前頁の(5)に代入して整理すると

$$b_{2k+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \left(b_{2k-1} - \frac{2}{3} \right) \quad (1)$$

$c_k = b_{2k-1} - \frac{2}{3}$ とおくと、 $c_{k+1} = b_{2(k+1)-1} - \frac{2}{3} = b_{2k+1} - \frac{2}{3}$ となり、(1)に代入して

$$c_{k+1} = \frac{1}{4} c_k \quad (2)$$

$c_1 = b_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} a_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ より、 c_k は初項 $-\frac{1}{6}$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列

$$\therefore c_k = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \quad (3)$$

よって $b_{2k-1} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{2k}} + \frac{2}{3}$ 、 $n = 2k - 1$ 、 $2k = n + 1$ より、 $b_n = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{3}$

$$a_n = b_n \cdot 2^n = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} + \frac{2}{3} 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{3} \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (4)$$

<nが偶数の場合>

$n = 2k (k = 1, 2, 3 \dots)$ とおき、前頁の(5)に代入して整理すると

$$b_{2k+2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \left(b_{2k} - \frac{2}{3} \right) \quad (5)$$

$c_k = b_{2k} - \frac{2}{3}$ とおくと、 $c_{k+1} = b_{2(k+1)} - \frac{2}{3} = b_{2k+2} - \frac{2}{3}$ となり、(5)に代入して

$$c_{k+1} = \frac{1}{4} c_k \quad (6)$$

$c_1 = b_2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} a_2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ より、 c_k は初項 $-\frac{1}{6}$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列

$$\therefore c_k = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \quad (7)$$

よって $b_{2k} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{2k}} + \frac{2}{3}$ 、 $n = 2k$ より、 $b_n = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3}$

$$a_n = b_n \cdot 2^n = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2^n}{2^n} + \frac{2}{3} 2^n = \frac{2^{n+1} - 2}{3} \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (8)$$

第2章 漸化式を解く

第3節 漸化式Ⅲを解く(1/3) 漸化式Ⅳと漸化式Ⅴから a_n を求める

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0 \quad (1)$$

この3項間漸化式から一般項を導く。A,B,Cを定数とし、(1)を以下の式で表せるとする。

$$a_{n+2} + Aa_{n+1} + B = C(a_{n+1} + Aa_n + B) \quad (2)$$

これを展開して係数を比較し(1)と一致するものとする、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} A - C &= -1 \\ A \cdot C &= 2 \\ B \cdot (1 - C) &= -1 \end{aligned} \quad (3)$$

(3)を解くと以下の解が得られる。

$$(A, B, C) = (1, 1, 2), \left(-2, -\frac{1}{2}, -1\right) \quad (4)$$

(4)を(2)に代入すると以下の式が得られる。

$$a_{n+2} + a_{n+1} + 1 = 2(a_{n+1} + a_n + 1) \quad (5)$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - \frac{1}{2} = -\left(a_{n+1} - 2a_n - \frac{1}{2}\right) \quad (6)$$

これで(1)を(2)の形で表すことができた。

(5)において $f_n = a_{n+1} + a_n + 1$ とおくと $f_{n+1} = 2f_n$

$f_1 = a_2 + a_1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 4$ より、 f_n は初項4、公比2の等比数列

$$\therefore f_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad (7)$$

よって以下の漸化式が導かれる。

漸化式Ⅳ	$a_{n+1} + a_n + 1 = 2^{n+1}$	(8)
------	-------------------------------	-----

(6)において $g_n = a_{n+1} - 2a_n - \frac{1}{2}$ とおくと $g_{n+1} = -g_n$

$g_1 = a_2 - 2a_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ より、 g_n は初項 $-\frac{1}{2}$ 、公比 -1 の等比数列

$$\therefore g_n = -\frac{1}{2}(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}(-1)^n \quad (9)$$

よって以下の漸化式が導かれる。

漸化式Ⅴ	$a_{n+1} - 2a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-1)^n$	(10)
------	--	------

(8)、(10)から a_{n+1} を消去すると以下の様に一般項が得られる。

$$a_n = \frac{1}{3}2^{n+1} - \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} \quad (11)$$

第2章 漸化式を解く

第3節 漸化式Ⅲを解く(2/3) 漸化式Ⅳを解く

漸化式Ⅳを整理すると以下。

$$a_{n+1} = -a_n + 2 \cdot 2^n - 1 \quad (1)$$

(1)において n を $n+1$ に置き換える。

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + 4 \cdot 2^n - 1 \quad (2)$$

(2)から(1)を引く。

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -(a_{n+1} - a_n) + 2 \cdot 2^n \quad (3)$$

階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ をとると $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$ となり、これらを(3)に代入すると

$$b_{n+1} = -b_n + 2 \cdot 2^n \quad (4)$$

(4)の両辺を 2^n で割る(指数項の消去)

$$\frac{1}{2^n} b_{n+1} = -\frac{1}{2^n} b_n + 2 \quad (5)$$

$c_n = \frac{1}{2^n} b_n$ とおくと $c_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} b_{n+1}$ 、 $\frac{1}{2^n} b_{n+1} = 2c_{n+1}$ となり、(5)に代入して整理すると

$$c_{n+1} = -\frac{1}{2} c_n + 1 \quad (6)$$

α を定数とし、(6)を以下の形で表せるものとする。

$$c_{n+1} - \alpha = -\frac{1}{2}(c_n - \alpha) \quad (7)$$

(7)を展開して(6)と係数を比較し解くと $\alpha = \frac{2}{3}$ が得られ、(6)は以下の様に変形できる。

$$c_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left(c_n - \frac{2}{3} \right) \quad (8)$$

$d_n = c_n - \frac{2}{3}$ とおくと $d_{n+1} = c_{n+1} - \frac{2}{3}$ となり、(8)に代入すると

$$d_{n+1} = -\frac{1}{2} d_n \quad (9)$$

$d_1 = c_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2^1} b_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}(a_2 - a_1) - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ より、 d_n は初項 $-\frac{1}{6}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$$\therefore d_n = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} \quad (10)$$

よって $c_n = d_n + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{2}{3}$ 、更に $b_n = c_n \cdot 2^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot 2^n + \frac{2}{3} 2^n = \frac{2}{3} 2^n + \frac{1}{3} (-1)^n$

階差数列の一般項 b_n が得られたので、一般項 a_n は以下の式から求められる。

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \quad (n \geq 2) \quad (11)$$

$$\therefore a_n = 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \frac{(-1)^{n-1} - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{3} 2^{n+1} - \frac{1}{6} (-1)^n - \frac{1}{2} \quad (12)$$

これに $n = 1$ を代入すると $a_1 = \frac{1}{3} 2^2 - \frac{1}{6} (-1)^1 - \frac{1}{2} = 1$ となり、(12)は $n \geq 1$ において成立。

第2章 漸化式を解く 第3節 漸化式Ⅲを解く(3/3) 漸化式Ⅴを解く

漸化式Ⅴを整理すると以下。

$$a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} \quad (1)$$

(1)において n を $n+1$ に置き換える。

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} \quad (2)$$

(2)から(1)を引く。

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) - (-1)^n \quad (3)$$

階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ をとると $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$ となり、これらを(3)に代入すると

$$b_{n+1} = 2b_n - (-1)^n \quad (4)$$

(4)の両辺を $(-1)^n$ で割る（指数項の消去）

$$\frac{1}{(-1)^n}b_{n+1} = \frac{2}{(-1)^n}b_n - 1 \quad (5)$$

$c_n = \frac{1}{(-1)^n}b_n$ とおくと $c_{n+1} = -\frac{1}{(-1)^n}b_{n+1}$ 、 $\frac{1}{(-1)^n}b_{n+1} = -c_{n+1}$ となり(5)に代入し整理すると

$$c_{n+1} = -2c_n + 1 \quad (6)$$

α を定数とし、(6)を以下の形で表せるものとする。

$$c_{n+1} - \alpha = -2(c_n - \alpha) \quad (7)$$

(7)を展開して(6)と係数を比較し解くと $\alpha = \frac{1}{3}$ が得られ、(6)は以下の様に変形できる。

$$c_{n+1} - \frac{1}{3} = -2\left(c_n - \frac{1}{3}\right) \quad (8)$$

$d_n = c_n - \frac{1}{3}$ とおくと $d_{n+1} = c_{n+1} - \frac{1}{3}$ となり、(8)に代入すると

$$d_{n+1} = -2d_n \quad (9)$$

$d_1 = c_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{(-1)^1}b_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{-1}(a_2 - a_1) - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$ より、 d_n は初項 $-\frac{4}{3}$ 、公比 -2 の等比数列

$$\therefore d_n = -\frac{4}{3} \cdot (-2)^{n-1} = \frac{2}{3} \cdot 2^n \cdot (-1)^n \quad (10)$$

よって $c_n = d_n + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot 2^n \cdot (-1)^n + \frac{1}{3}$

更に $b_n = c_n \cdot (-1)^n = \frac{2}{3} \cdot 2^n \cdot (-1)^{2n} + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$

(ここで求められた階差数列の一般項 b_n は1つ目の二項間漸化式の階差数列と等しい。)

階差数列の一般項 b_n が得られたので、一般項 a_n は以下の式から求められる。

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \quad (n \geq 2) \quad (11)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3}2^{n+1} - \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} \quad (12)$$

これに $n = 1$ を代入すると $a_1 = 1$ となり、(12)は $n \geq 1$ において成立。

第2章 漸化式を解く

第4節 漸化式Ⅶを解く 輪の数が奇数の場合

以下の漸化式を解く。

$$a_{n+2} = 4a_n + 1 \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (1)$$

n が奇数だから、 $n = 2k - 1$ ($k = 1, 2, 3 \dots$) とおいて(1)に代入すると

$$a_{2k+1} = 4a_{2k-1} + 1 \quad (2)$$

$b_k = a_{2k-1}$ とおくと、 $b_{k+1} = a_{2(k+1)-1} = a_{2k+1}$ となり、(2)に代入して

$$b_{k+1} = 4b_k + 1 \quad (3)$$

α を定数とし、(3)を以下の形で表せるものとする。

$$(b_{k+1} - \alpha) = 4(b_k - \alpha) \quad (4)$$

(4)を展開して(3)と係数を比較し解くと $\alpha = -\frac{1}{3}$ が得られ、(3)は以下の様に変形できる。

$$b_{k+1} + \frac{1}{3} = 4\left(b_k + \frac{1}{3}\right) \quad (5)$$

$c_k = b_k + \frac{1}{3}$ とおくと、 $c_{k+1} = b_{k+1} + \frac{1}{3}$ となり、(5)に代入して

$$c_{k+1} = 4c_k \quad (6)$$

$c_1 = b_1 + \frac{1}{3} = a_1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ より、 c_k は初項 $\frac{4}{3}$ 、公比4の等比数列

$$\therefore c_k = \frac{4}{3} \cdot 4^{k-1} = \frac{1}{3} \cdot 4^k \quad (7)$$

$$\text{よって } b_k = c_k - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4^k - \frac{1}{3} = \frac{2^{2k} - 1}{3}, \quad a_{2k-1} = \frac{2^{2k} - 1}{3}$$

$n = 2k - 1$ 、 $2k = n + 1$ を代入して、 n が奇数の場合の a_n は以下の様に表せる。

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 1}{3} \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (8)$$

ところで、漸化式Ⅶを導いた際、元の式の1つは $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 3, 5 \dots$) であった。
この式と(8)から、 n が偶数の場合の a_n を求めることも出来る。この式に(8)を代入すると

$$a_{(n+1)} = 2 \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{3} = \frac{2^{(n+1)+1} - 2}{3} \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (9)$$

ここで、($n = 1, 3, 5 \dots$)としていたから、($n + 1 = 2, 4, 6 \dots$)である。

よって、($n = 2, 4, 6 \dots$)とすると、(9)は以下の様に表される ($n+1$ を n に置き換える)。

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 2}{3} \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (10)$$

これは、 n が偶数の場合の a_n である。

第2章 漸化式を解く

第5節 漸化式Ⅷを解く 輪の数が偶数の場合

以下の漸化式を解く。

$$a_{n+2} = 4a_n + 2 \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (1)$$

n が偶数だから、 $n = 2k$ ($k = 1, 2, 3 \dots$) とおいて(1)に代入すると

$$a_{2k+2} = 4a_{2k} + 2 \quad (2)$$

$b_k = a_{2k}$ とおくと、 $b_{k+1} = a_{2(k+1)} = a_{2k+2}$ となり、(2)に代入して

$$b_{k+1} = 4b_k + 2 \quad (3)$$

α を定数とし、(3)を以下の形で表せるものとする。

$$(b_{k+1} - \alpha) = 4(b_k - \alpha) \quad (4)$$

(4)を展開して(3)と係数を比較し解くと $\alpha = -\frac{2}{3}$ 得られ、(3)は以下の様に変形できる。

$$b_{k+1} + \frac{2}{3} = 4\left(b_k + \frac{2}{3}\right) \quad (5)$$

$c_k = b_k + \frac{2}{3}$ とおくと、 $c_{k+1} = b_{k+1} + \frac{2}{3}$ となり、(5)に代入して

$$c_{k+1} = 4c_k \quad (6)$$

$c_1 = b_1 + \frac{2}{3} = a_2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ より、 c_k は初項 $\frac{8}{3}$ 、公比4の等比数列

$$\therefore c_k = \frac{8}{3} \cdot 4^{k-1} = \frac{2}{3} \cdot 4^k \quad (7)$$

よって $b_k = c_k - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 4^k - \frac{2}{3} = \frac{2^{2k+1} - 2}{3}$ 、 $a_{2k} = \frac{2^{2k+1} - 2}{3}$

$n = 2k$ を代入して、 n が偶数の場合の a_n は以下の様に表せる。

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 2}{3} \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (8)$$

ところで漸化式Ⅷを導いた際、元の式の1つは $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n = 2, 4, 6 \dots$) だった。

この式と(8)から、 n が奇数の場合の a_n を求めることも出来る。この式に(8)を代入すると

$$a_{(n+1)} = 2 \cdot \frac{2^{n+1} - 2}{3} + 1 = \frac{2^{(n+1)+1} + (3-4)}{3} = \frac{2^{(n+1)+1} - 1}{3} \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (9)$$

ここで、($n = 2, 4, 6 \dots$)としていたから、($n+1 = 3, 5, 7 \dots$)である。

よって、($n = 3, 5, 7 \dots$)とすると、(9)は以下の様に表される ($n+1$ を n に置き換える)。

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 1}{3} \quad (n = 3, 5, 7 \dots) \quad (10)$$

(10)に $n = 1$ を代入すると $a_1 = \frac{2^2 - 1}{3} = 1$ より、(10)は $n = 1$ でも成り立つ。よって

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 1}{3} \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (11)$$

第3章 過去に示された手法

第1節 Rouse Ballが示した手法

Rouse Ballの著書"Mathematical Recreations and Essays"に手数 of 計算方法が示してある。

(これはG.Cardano、J.Wallisの研究を補ってRouse Ballが示したものだという。)

また松田道雄は、このRouse Ballの説明を「要約する」としてこの計算方法を示した。

参考にこの計算方法の概要を示す。尚、私の解釈が含まれてしまうことをご了解頂きたい。

(原文では輪の数をmとし、奇数の場合を $m=2n+1$ としていたが、ここでは以下の様にする。)

<輪の数nが奇数の場合> $n = 2k - 1$ とする。 ($k = 1, 2, 3 \dots$ 、 $n = 1, 3, 5 \dots$)

輪の数が少ない場合の手数は容易に数えられる。

1番までの輪を外す手数は1手。

3番までの輪を外す手数は、上から4手増えて5手。計算が見えるように書くと $(1 + 4)$ 手。

5番までの輪を外す手数は、上から 4^2 手増えて21手。同様に $(1 + 4 + 4^2)$ 手。

以下同様に「法則1」に従って手数が増えていく。整理すると以下。

$k = 1$: 1番までの輪を外す手数は1手

$k = 2$: 3番までの輪を外す手数は $(1 + 4)$ 手

$k = 3$: 5番までの輪を外す手数は $(1 + 4 + 4^2)$ 手

...

$k = k$: n番までの輪を外す手数は $(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{k-1})$ 手

n番までの輪を外す手数を計算すると以下の様になる。(nが奇数の場合)

$$a_n = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{k-1} = \frac{1}{4} \cdot (4^1 + 4^2 + \dots + 4^k) = \frac{4}{4} \cdot \frac{4^k - 1}{4 - 1} = \frac{2^{2k} - 1}{3} = \frac{2^{n+1} - 1}{3} \quad (1)$$

<輪の数nが偶数の場合> $n = 2k$ とする。 ($k = 1, 2, 3 \dots$ 、 $n = 2, 4, 6 \dots$)

2番までの輪を外す手数は2手。

4番までの輪を外すと、上から8手増えて10手。計算が見えるように書くと $(2 + (2 \times 4))$ 手。

6番までの輪を外すと、上から32手増えて42手。同様に $(2 + (2 \times 4) + (2 \times 4^2))$ 手。

以下同様に「法則1」に従って手数が増えていく。整理すると以下。

$k = 1$: 2番までの輪を外す手数は2手

$k = 2$: 4番までの輪を外す手数は $(2 + (2 \times 4))$ 手

$k = 3$: 6番までの輪を外す手数は $(2 + (2 \times 4) + (2 \times 4^2))$ 手

...

$k = k$: n番までの輪を外す手数は $(2 + (2 \times 4) + (2 \times 4^2) + \dots + (2 \times 4^{k-1}))$ 手

n番までの輪を外す手数を計算すると以下の様になる。(nが偶数の場合)

$$a_n = 2(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{k-1}) = \frac{2}{4} (4^1 + 4^2 + \dots + 4^k) = \frac{2^{2k+1} - 2}{3} = \frac{2^{n+1} - 2}{3} \quad (2)$$

第3章 過去に示された手法

第2節 松田道雄が示した手法

参考に、松田道雄が示した漸化式Ⅲ（本稿における呼び名）の計算方法の概要を示す。
私の解釈が含まれてしまっているであろうことをご了解頂きたい。

＜松田道雄が示した漸化式Ⅲの計算方法の概要＞

元の漸化式は以下（ n が変えてある）

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1 \quad (1)$$

n を $n-1$ とした漸化式を作る（定数項の消去）

$$a_{n-1} = a_{n-2} + 2a_{n-3} + 1 \quad (2)$$

(1)から(2)を引いて変形すると

$$a_n - a_{n-2} = 2(a_{n-1} - a_{n-3}) \quad (3)$$

ここから、いわゆる「消去法」によって(3)の左辺を除く数列を消去する。(3)から始めて、 n を1ずつ下げた式を a_{n-3} が a_1 になるまで列挙し、各式の両辺に適切な係数をかけた後に全式を合計する。係数は第1式=(3)の左辺と、最終式の右辺を除く全ての項が消去されるようにする。これを計算・整理して以下の2項間漸化式が導かれる。

$$a_n - a_{n-2} = 2^{n-1} \quad (4)$$

更に(4)を n が奇数と偶数の場合に分けて(3)と同様の方法で解き、各一般項を求めた。

ところで(3)は等比数列の形をしている。（なぜ等比数列の形が作れたのか、私には不明）
(3)の n を $n+3$ に置き換える（ n を本稿に合わせる）と、以下の漸化式が得られる。

漸化式Ⅵ	$a_{n+3} - a_{n+1} = 2(a_{n+2} - a_n)$	(5)
------	--	-----

＜漸化式Ⅵを別の方法で解く＞

x_n の定義より $x_n = a_{n+2} - a_n$ であり、また $x_{n+1} = a_{n+3} - a_{n+1}$ と表せる。(5)に代入して

$$x_{n+1} = 2x_n \quad (6)$$

$x_1 = a_3 - a_1 = 5 - 1 = 4$ より、 x_n は初項4、公比2の等比数列だから

$$x_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad (7)$$

(7)を $x_n = a_{n+2} - a_n$ に代入して整理すると

$$a_{n+2} = a_n + 2^{n+1} \quad (8)$$

(8)は漸化式Ⅱと等しい。またこれは n を置き換えれば(4)と一致する。

よってこの先は、別を示した漸化式Ⅱの解法より、 a_n を求めることが出来る。（終わり）

＜「法則3」より漸化式Ⅵを確認する＞

n が奇数の時、 $a_{n+1} = 2a_n$ 、 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 1 = 4a_n + 1$ 、 $a_{n+3} = 2a_{n+2} = 8a_n + 2$ となる。

漸化式Ⅵの左辺は $(8a_n + 2) - 2a_n = 6a_n + 2$ 、右辺は $2(4a_n + 1 - a_n) = 6a_n + 2$ となり成立。

n が偶数の時、 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ 、 $a_{n+2} = 2a_{n+1} = 4a_n + 2$ 、 $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 1 = 8a_n + 5$ となる。

漸化式Ⅵの左辺は $(8a_n + 5) - (2a_n + 1) = 6a_n + 4$ 、右辺は $2(4a_n + 2 - a_n) = 6a_n + 4$ で成立。

よって漸化式Ⅵは成り立つ。

第3章 過去に示された手法

第3節 L.Grosが示した手法

Rouse Ballは、よりエレガントな解法としてL.Grosの研究を紹介している。
それは、輪の各状態が二進法の数字で表され、各操作は1の加減算で表されるというものだ。
その要点を私なりに整理すると以下の様になる。

要点1：全ての輪の状態は、それぞれに対応する2進法の数字で表すことができる。

図3の様に、輪がかかっている状態を1、外れている状態を0とし、輪の状態を数値化できる。
この各数字を適切に変換すると、2進法の各数字が導ける。また逆に変換することもできる。
つまり、チャイニーズリングの各状態は、2進法の各数字と一対一に対応している。

要点2：輪を外す操作は（2進法で）1を引く事に、かける操作は1を足す事に相当する。

ちなみに、ここで言う「輪を外す」「輪をかける」とは、個々の操作を表すものではない。
チャイニーズリングでは、輪をかけたのに、全体としては外す方向に向かっている場面がある。
同様に、輪を外したのに、全体としてはかける方向に向かっている場面がある。
つまり、ここで言う「輪を外す操作」は「知恵の輪を外す方向に向かう操作」を表す。
同様に「輪をかける操作」は「知恵の輪をかける方向に向かう操作」を表す。

要点3：全ての輪がかかった状態は2進法で「1010...」と表される（1と0が交互に続く）。

例えば輪が7つの場合、全ての輪がかかった状態は、2進法で「1010101」と表される。これがそのまま手数を表す。よってこれを10進法で表すと「 $2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 64 + 16 + 4 + 1 = 85$ 」となり、手数は85手と分かる。任意の輪の数の場合についても、同様に計算することが出来る。任意の輪の数の場合の計算式は、Rouse Ballが示した手法に書いた通りとなる。

要点4：ある状態から他の状態へ移行する手数は、各状態を表す2進法の数字の差に等しい。

更に、この2進法を用いると、全ての輪がかかった状態からに限らず、ある任意の状態から他の任意の状態へ移行する手数を容易に求めることが出来る。それぞれの輪の状態を表す数字を、それぞれに対応する2進法の数字に変換して、その差を計算すればよい。

要点5：輪の状態を表す数字から、対応する2進法の数字を導く方法は以下（図3を参照）。

＜柄にかかっている輪（輪の状態の数字が1）の桁＞ 数字を「変化」させる。
左端を1とする、1と0を交互に与える。つまり、左から1、0、1、0...とする。

＜柄から外れている輪（輪の状態の数字が0）の桁＞ 数字を「継続」させる。
左にある（最も近い、柄にかかった輪の桁に与えた）2進法の数字を「継続」させる。

この決まりは、結果としてこれでうまく変換できるというものだと思うが、なぜこの決まりで変換できるのか、今後の課題として、その仕組みが分かりやすく説明できれば良いと思う。

第4章 補論 第1節 「からくり箱」の手数の数え方から

私の職人としての仕事である「からくり細工」に「CUBI（キュービ、1985年、亀井明夫）」という作品がある。いわゆる「2進法の箱」だ。この箱の動きをある決まりの下で数値化すると、チャイニーズリングのそれと同じ数列が導かれる。ところで、この箱の回数を説明する時に、ある便利な数え方を用いていた。それは「2を（面の数－1）回かける」というものだった。

箱の面の数は6で、最初に開く面から1番、2番...としふたを6番とする。最初は全ての面が閉まっており、1番だけが開く。ここから各面を順番に動かして行く。総手数は「2を（6-1）回かける」と計算でき、32回となる。これは、ふたを除く5つの面の「開け閉めの組み合わせの総数」に等しく、実際にそれらの全ての組み合わせを経てゴールに至る。理屈にもあう計算方法だ。

数値化は、チャイニーズリングは輪がかかっている状態を1、外れている状態を0とする。からくり箱は面が閉まっている状態が0、開いている状態が1となる。2進法と対応するように数列を並べると分かり易い（図3）。チャイニーズリングでは2進法の各位が各輪に対応し、1の位が1番の輪となる。からくり箱では各位が各面に対応し、1の位が1番の面となる。

ところが、ここまでは数列は全く同じだが、奇妙な事に進行方向は逆となる。2進法で数を数える方向を昇順とすると、からくり箱は昇順、チャイニーズリングは降順となる。これは、箱は「開ける」もの、知恵の輪は「外す」ものという遊び方の違いによる。だから、2進法で数を数えるイメージで知恵の輪を操作すると、輪をかける操作となる。手数は同じだ。

操作の流れだが、箱のふたが開いた直後には、5番、6番は開いていて他は閉まっている。箱の場合はこれがゴールだが、知恵の輪の場合はまだ続きがある。更に残りの面を開ける（輪をかける）操作が必要になる。次に目指すのは3番、4番の面を開ける（輪をかける）ことだ。最後に1番、2番の面を開ける（輪をかける）とゴールになる。「2個ずつ」の操作も共通している。

からくり箱の場合、ふたを開けた後に追加操作が出来る（ように作る）かどうかは、製作者の意図で決まる。ここでは出来るものと仮定する。さて、手数は、5番・6番の操作が $2^5 = 32$ 手、3番・4番の操作が $2^3 = 8$ 手、1番・2番の操作が $2^1 = 2$ 手となる。これらを合計して、 $32 + 8 + 2 = 42$ 手となる。これは6つの輪のチャイニーズリングの手数と一致する。

ところで、このからくり箱は6面だったが、仕掛を並列化して別の設計をすると、6番を越えた作品が作れる。仕掛の数は奇数でも偶数でもよい。奇数の場合の計算方法は、例えば5番までの場合、4番・5番の操作に $2^4 = 16$ 手、2番・3番の操作に $2^2 = 4$ 手、1番の操作に1手となる。合計して $16 + 4 + 1 = 21$ 手となる。これらの計算を一般化して整理すると以下の様になる。

$$(n \text{ が奇数}) \quad a_n = 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^4 + 2^2 + 2^0$$

$$(n \text{ が偶数}) \quad a_n = 2^{n-1} + 2^{n-3} + \dots + 2^5 + 2^3 + 2^1$$

n が奇数の場合を $n = 2k - 1$ 、 n が偶数の場合を $n = 2k$ として計算すると ($k = 1, 2, 3 \dots$)

$$a_n = a_{2k-1} = 2^{2k-2} + 2^{2k-4} + \dots + 2^2 + 2^0 = 4^{k-1} + 4^{k-2} + \dots + 4^1 + 4^0 = \frac{2^{n+1} - 1}{3} \quad (1)$$

$$a_n = a_{2k} = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \dots + 2^3 + 2^1 = \frac{1}{2} (4^k + 4^{k-1} + \dots + 4^2 + 4^1) = \frac{2^{n+1} - 2}{3} \quad (2)$$

このように、からくり箱の手数の数え方からチャイニーズリングの計算式を導くことが出来た。

ところでRouse Ballは、著書でL.Grosの研究を紹介する中で、同様の手数の式を示している。

このからくり箱もチャイニーズリングも同じ2進法を原理とするのだから、当然とも言える。

<図3>

2進法の数列

	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	1	1	1
8	0	0	1	0	0	0
9	0	0	1	0	0	1
10	0	0	1	0	1	0
11	0	0	1	0	1	1
12	0	0	1	1	0	0
13	0	0	1	1	0	1
14	0	0	1	1	1	0
15	0	0	1	1	1	1
16	0	1	0	0	0	0
17	0	1	0	0	0	1
18	0	1	0	0	1	0
19	0	1	0	0	1	1
20	0	1	0	1	0	0
21	0	1	0	1	0	1
22	0	1	0	1	1	0
23	0	1	0	1	1	1
24	0	1	1	0	0	0
25	0	1	1	0	0	1
26	0	1	1	0	1	0
27	0	1	1	0	1	1
28	0	1	1	1	0	0
29	0	1	1	1	0	1
30	0	1	1	1	1	0
31	0	1	1	1	1	1
32	1	0	0	0	0	0
33	1	0	0	0	0	1
34	1	0	0	0	1	0
35	1	0	0	0	1	1
36	1	0	0	1	0	0
37	1	0	0	1	0	1
38	1	0	0	1	1	0
39	1	0	0	1	1	1
40	1	0	1	0	0	0
41	1	0	1	0	0	1
42	1	0	1	0	1	0

ヨコ列の1～6の数字は
2進法の各位を表す。

- 1 : 1の位
- 2 : 10の位
- 3 : 100の位
- 4 : 1000の位
- 5 : 10000の位
- 6 : 100000の位

タテ列の1～32の数字は
数を10進法で表したものの。

2進法のからくり箱の数列(面が6つの場合)
チャイニーズリングの数列(輪が6つの場合)

	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	1	1	1
6	0	0	0	1	0	1
7	0	0	0	1	0	0
8	0	0	1	1	0	0
9	0	0	1	1	0	1
10	0	0	1	1	1	1
11	0	0	1	1	1	0
12	0	0	1	0	1	0
13	0	0	1	0	1	1
14	0	0	1	0	0	1
15	0	0	1	0	0	0
16	0	1	1	0	0	0
17	0	1	1	0	0	1
18	0	1	1	0	1	1
19	0	1	1	0	1	0
20	0	1	1	1	1	0
21	0	1	1	1	1	1
22	0	1	1	1	0	1
23	0	1	1	1	0	0
24	0	1	0	1	0	0
25	0	1	0	1	0	1
26	0	1	0	1	1	1
27	0	1	0	1	1	0
28	0	1	0	0	1	0
29	0	1	0	0	1	1
30	0	1	0	0	0	1
31	0	1	0	0	0	0
32	1	1	0	0	0	0
33	1	1	0	0	0	1
34	1	1	0	0	1	1
35	1	1	0	0	1	0
36	1	1	0	1	1	0
37	1	1	0	1	1	1
38	1	1	0	1	0	1
39	1	1	0	1	0	0
40	1	1	1	1	0	0
41	1	1	1	1	0	1
42	1	1	1	1	1	1

← この時、2進法のからくり箱は
全ての面が閉まっている。
チャイニーズリングは
全ての輪が外れている。

(閉まって行く方向)



2進法のからくり箱



(開いて行く方向)

(輪を外して行く方向)



チャイニーズリング



(輪をかけて行く方向)

← この時、2進法のからくり箱は
6番をあけた直後の状態。
5番、6番だけが開いている。
チャイニーズリングは
5番、6番だけがかかっている。

この時、2進法のからくり箱は
全ての面が開いている。
チャイニーズリングは

← 全ての輪がかかっている。

ヨコ列の1～6の数字は
2進法のからくり箱の各面の番号および、
チャイニーズリングの輪の番号を表す。

タテ列の1～32の数字は
2進法のからくり箱の面を動かした回数
チャイニーズリングの輪を動かした回数

メッシュの中の数字はそれぞれ以下を表す。

2進法のからくり箱

0	面が閉まっている
1	面が開いている

チャイニーズリング

0	輪が外れている
1	輪がかかっている

第4章 補論 第2節 「法則1」が成り立つnの下限(1/2)

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$ 等の手数は容易に数えることが出来る。よって、これらを初期条件と考えて、その上で「法則1」に基づいてより大きいnについての手数を計算して行くことが出来る。この方法で、計算そのものには何の問題も起きない。ところが、nが小さい場合においては、「法則1」がどこまで適用できるのか、気になった。

級数によって手数を表現したのを見ると、例えば5番までの輪を外す手数は $(1 + 4 + 4^2)$ となっている。ここで、「法則1」でも示されるように「 4^2 は4の4倍」という計算になっている。すると、同様に「4は1の4倍」という計算になっているように見える。ところで「法則1」は、輪を2個外した時に増える手数と、そこから更に2個外した時に増える手数を比較するものだった。ところがここで、1は「輪を2個外した時に増える手数」となっているだろうか？

ここでは、このちょっとした疑問について、「法則1」を導いた図1の仕組みから、nのそれぞれについて実際に計算して見る。それぞれ定義は以下の様にする。

<数列 a_n の定義>

1番からある番号までの輪を外す手数を数列を用いて以下の様に定義する。他も同様。

a_1 : 1番から (1番まで) の輪を外す手数

a_3 : 1番から3番までの輪を外す手数

<数列 x_n の定義>

各状態の間で移行する手数を数列を用いて以下の様に定義する。他も同様。

x_1 : 1番までの輪が外れた状態から、更に2つの輪が外れた状態へ移行する手数

x_3 : 3番までの輪が外れた状態から、更に2つの輪が外れた状態へ移行する手数

x_n : n番までの輪が外れた状態から、更に2つの輪が外れた状態へ移行する手数

<数列 x_n の定義>

各状態の間で移行する手数を数列を用いて以下の様に定義する。

x_n : ①から②へ移行する手数 = 1手 + 「④と⑤の入れ替え」の手数

x_{n-1} : 「④と⑤の入れ替え」の手数

図は各nについての「n番までの輪が外れた状態」を表す。(○は実際の輪、●は架空の輪)

以下の各nについて、①→②の手数 x_n を数えて、②→③の手数 x_{n+2} と比較する。

そして、これらが「法則1」を表す $x_{n+2} = 4x_n$ を満たすかどうかを検証する。

<「法則1」が成り立つかどうかの予想>

n=1の場合は、①→②で操作する輪が2個存在し、「法則1」は問題なく成立するだろう。

n=0の場合は、①→②で操作する輪が2個存在する為、恐らく成立するだろう。

n=-1の場合は、①→②で操作する輪が1個となる為、微妙だが、成立するのではないかな？

n=-2の場合は、①→②で操作する輪が存在せず、成立しないと思われる。

第4章 補論 第2節 「法則1」が成り立つnの下限(2/2)

<n=1の場合>

$\dots \frac{\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}}{\textcircled{0}\bullet} \dots$ 左から順番に5番、4番、3番、2番、1番、(0番)

④は2番がかかっている状態、⑤は1番と2番が外れている状態となる。

「④と⑤の入れ替え」は「1番をかける $\leftrightarrow$ 2番を外す $\leftrightarrow$ 1番を外す」(または逆)の3手となる。

すると「①から②への手数」は(1手+「④と⑤の入れ替え」の手数より)4手となる。

数列で表すと $(x_1 - 1) = 3$ 、 $x_1 = 4$ となり、 $x_3 = 16$ と比較すると $x_3 = 4x_1$ が成り立つ。

「法則1」は成り立つ。

<n = 0の場合>

$\dots \frac{\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}}{\bullet\bullet} \dots$ 左から順番に4番、3番、2番、1番、(0番、-1番)
--

④は1番がかかっている状態、⑤は1番が外れている状態となる。

「④と⑤の入れ替え」は「1番の輪を外す(またはかける)」の1手となる。

「①から②への手数」は(1手+「④と⑤の入れ替え」の手数より)2手となる。

数列で表すと $(x_0 - 1) = 1$ 、 $x_0 = 2$ となり、 $x_2 = 8$ と比較すると $x_2 = 4x_0$ が成り立つ。

「法則1」は成り立つと考えてよさそうだ。

<n = -1の場合>

$\dots \frac{\textcircled{0}\textcircled{0}\textcircled{0}\bullet}{\bullet\bullet} \dots$ 左から順番に3番、2番、1番、(0番、-1番、-2番)

④、⑤はともに操作する輪が存在しない。「④と⑤の入れ替え」は何もしないので0手。

「①から②への手数」は(1手+「④と⑤の入れ替え」の手数より)1手となる。

数列で表すと $(x_{-1} - 1) = 0$ 、 $x_{-1} = 1$ となり、 $x_1 = 4$ と比較すると $x_1 = 4x_{-1}$ が成り立つ。

少なくとも計算の上では、「法則1」は成り立つと考えてよさそうだ。

<n = -2の場合>

$\dots \frac{\textcircled{0}\textcircled{0}\bullet\bullet}{\bullet\bullet} \dots$ 左から順番に2番、1番、(0番、-1番、-2番、-3番)
--

④、⑤はともに操作する輪が存在しない。「④と⑤の入れ替え」は何もしないので0手。

「①から②への手数」も、操作する輪が存在しない為0手となる。

よって「輪を2個外した時に増える手数」は0手となる。

これを $x_0 = 2$ と比較すると、0手を4倍しても2にはならず「法則1」は成立しない。

<まとめ>

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ともに、少なくとも計算上は「法則1」と整合性を持つようだ。

ここで求めた手数は、数式では $x_n = 2^{n+1}$ と表していたが、 $n \geq -1$ において矛盾はない。

nをマイナスの数字として表記するのは、さすがに机上のことになるだろう。

しかし、以上から「法則1」の下限を $n = -1$ としても、計算上は矛盾しないだろう。

これは、チャイニーズリングの理論に対する構造の純粋さを表しているように思える。

第4章 補論 第3節 漸化式が表す意味

漸化式は様々な解釈が可能だろう。ここでは幾つかの漸化式について1つの解釈を試みる。

漸化式II (変形1)

$$a_{n+2} - a_n = 2^{n+1}$$

(1)

漸化式IIは、少し変形すると上の様に表せる。

この式は、①→②の手数($a_{n+2} - a_n$)が 2^{n+1} 手となることを表す式と解釈できる。

漸化式II (変形2)

$$a_{n+4} - a_{n+2} = 2^{n+3}$$

(2)

$a_{n+2} - a_n = 2^{n+1}$ を漸化式Iに代入するか、または n を $n+1$ に置き換えると上の漸化式が得られる。

この式は、②→③の手数($a_{n+4} - a_{n+2}$)が 2^{n+3} 手となることを表す式と解釈できる。

漸化式IV (変形)

$$a_{n+1} + a_n = 2^{n+1} - 1$$

(3)

漸化式IVは、少し変形すると上の様に表せる。

n 番までの輪をかける手数は a_n 手と表され、 $n+1$ 番までの輪を外す手数は a_{n+1} 手と表される。

「④と⑤の入れ替え」の手数は「 n 番までの輪をかけて、 $n+1$ 番までの輪を外す」手数に等しい。

よって、「④と⑤の入れ替え」の手数は($a_{n+1} + a_n$)と表せる。

漸化式IV (変形) は「④と⑤の入れ替え」の手数は $2^{n+1} - 1$ となることを表す式と解釈できる。

漸化式V (変形)

$$a_{n+1} = 2a_n + \frac{(-1)^n + 1}{2}$$

(4)

漸化式Vは、少し変形すると上の様に表せる。

右辺を見ると、 $2a_n$ は a_n の2倍を表し、 $\frac{(-1)^n + 1}{2}$ の部分は n により変化することが分かる。

$n = 1, 2, 3, 4 \dots$ となる時、 $(-1)^n$ は、 $(-1)^n = -1, 1, -1, 1 \dots$ と変化する。

すると、 $((-1)^n + 1)$ の値は、 $((-1)^n + 1) = 0, 2, 0, 2 \dots$ と変化する。

従って、 $\frac{(-1)^n + 1}{2}$ の値は、 $\frac{(-1)^n + 1}{2} = 0, 1, 0, 1 \dots$ と変化する。

整理すると、 $\frac{(-1)^n + 1}{2}$ の値は、 n が奇数の場合は0となり、 n が偶数の場合は1となる。

つまり漸化式Vは、 a_{n+1} は a_n から以下の様にして求められることを意味している。

n が奇数の場合： a_{n+1} は a_n を2倍して求められる。

n が偶数の場合： a_{n+1} は a_n を2倍して、更に1を足すことで求められる。

これは「法則3」である。つまり漸化式Vは「法則3」を表す式と解釈できる。(以上)

第4章 補論 第4節 x という定義について

Rouse.Ballは、本稿で言う「①から②への手数」を「 x 手」と表現した。すると「②から③への手数」は「 $4x$ 手」と表されることを示し、本稿で言う「法則1」を証明した。そしてここから任意の数の輪の場合の手数を示した。松田道雄も同様に「 x 手」という表現を用いた。そして松田は「法則1」の証明を示す中で、 $a_1 = 1$ と $a_3 = 5$ の差として $x = 4$ を示し、また $a_2 = 2$ と $a_4 = 10$ の差として $x = 8$ を示した。そしてここから任意の数の輪の場合の手数を示した。

「 x 手」の用い方だが、「法則1」と a_1 と a_3 の差 $x = 4$ を用いると a_3 と a_5 の差はこの様に計算される。 $a_5 - a_3 = 4x = 4 \cdot 4 = 16$ 。ここから $a_5 = a_3 + 16 = 5 + 16 = 21$ となる。そしてその次はというと、今度は a_3 と a_5 の差を「 x 手」と考えて、 $x = 16$ と設定し直すことになる。すると、 a_5 と a_7 の差はこの様に計算される。 $a_7 - a_5 = 4x = 4 \cdot 16 = 64$ 。ここから $a_7 = a_5 + 64 = 21 + 64 = 85$ となる。以下同様に、「 x 手」を設定し直しつつ先を求めることになる。

また、 a_2 と a_4 の差 $x = 8$ を用いる場合についても同様である。 a_4 と a_6 の差はこの様に計算される。 $a_6 - a_4 = 4x = 4 \cdot 8 = 32$ 。ここから $a_6 = a_4 + 32 = 10 + 32 = 42$ となる。そしてその次は、今度は a_4 と a_6 の差を「 x 手」と考えて、 $x = 32$ と設定し直すことになる。すると、 a_6 と a_8 の差はこの様に計算される。 $a_8 - a_6 = 4x = 4 \cdot 32 = 128$ 。ここから $a_8 = a_6 + 128 = 42 + 128 = 170$ となる。以下同様に、「 x 手」を設定し直しつつ先を求めることが出来る。

ところで本稿では、上の様に「 x を設定し直す」代わりに、「 x 」の変化を「数列 x_n 」によって定義してこれを用いた。これによって「 x 」の値を整理でき、各「 x 」の関係は以下の様に表せる。 $x_3 = 4x_1$, $x_5 = 4x_3$, $x_7 = 4x_5 \dots$ また $x_4 = 4x_2$, $x_6 = 4x_4$, $x_8 = 4x_6 \dots$ つまり以下の様になる。

$$x_{n+2} = 4x_n \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

これを用いて表すと計算は以下の様になる。

$$a_3 - a_1 = x_1 = 4 \text{ より、} a_5 - a_3 = 4x_1 = 16. \text{ よって } a_5 = a_3 + 16 = 21$$

$$a_5 - a_3 = x_3 = 16 \text{ より、} a_7 - a_5 = 4x_3 = 64. \text{ よって } a_7 = a_5 + 64 = 85$$

$$a_7 - a_5 = x_5 = 64 \text{ より、} a_9 - a_7 = 4x_5 = 256. \text{ よって } a_9 = a_7 + 256 = 341$$

n が偶数の場合も同様であり、またこの先も同様である。

また本稿で計算を試みた様に、 x_n の一般項は $x_n = 2^{n+1}$ と表せる。つまり、①から②への手数は 2^{n+1} 手と表現できる。すると、②から③への手数は「法則1」から $x_{n+2} = 4x_n = 4 \cdot 2^{n+1}$ と計算出来る。または、 $x_n = 2^{n+1}$ の n を $n+2$ に置き換えて $x_{n+2} = 2^{(n+2)+1} = 2^{n+3} = 4 \cdot 2^{n+1}$ と計算出来る。これを整理すると以下の様になる。

$$\text{①から②への手数は} 2^{n+1} \text{手、②から③への手数は} 4 \cdot 2^{n+1} \text{手} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

この様に、各手数を一般項として表現して見ると、明らかに「②→③の手数は①→②の手数の4倍」となっており、「法則1」は極めて分かり易く表現される。

第4章 補論 第5節 級数による表現の見え方

初めて以下の様な級数による手数の表現を見た時、 n が奇数の場合と偶数の場合とでどのように整合性がとれているのか、感覚的に分からなかった。 $(k = 1, 2, 3 \dots)$

$$a_{2k-1} = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{k-1} \quad (1)$$

$$a_{2k} = 2 + (2 \times 4) + (2 \times 4^2) + \dots + (2 \times 4^{k-1}) \quad (2)$$

そこで、以下の様に書き換えてみると、だいぶ分かり易くなった。

$$a_{2k-1} = 1(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{k-1}) \quad (3)$$

$$a_{2k} = 2(1 + 4 + 4^2 + 4^3 \dots + 4^{k-1}) \quad (4)$$

更に、指数の底を4から2に変えて整理すると以下の様になった。

$$a_{2k-1} = 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2k-2} \quad (5)$$

$$a_{2k} = 2^1 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2k-1} \quad (6)$$

底が4の場合と同様に変形すると以下の様になった。

$$a_{2k-1} = 1(2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2k-2}) \quad (7)$$

$$a_{2k} = 2(2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2k-2}) \quad (8)$$

新しい規則性が見えてくる気がしないだろうか。もちろんそれぞれ同じ意味の数式である。以下に、実際の数字で表してみた。(7)、(8)は漸化式Ⅱ ($a_{n+2} = a_n + 2^{n+1}$) を用いるとよい。

$a_1 = 1 = 1(4^0)$	$a_1 = 1 = 2^0$
$a_2 = 2 = 2(4^0)$	$a_2 = 2 = 2^1$
$a_3 = 5 = 1(4^0 + 4^1)$	$a_3 = 5 = 2^0 + 2^2$
$a_4 = 10 = 2(4^0 + 4^1)$	$a_4 = 10 = 2^1 + 2^3$
$a_5 = 21 = 1(4^0 + 4^1 + 4^2)$	$a_5 = 21 = 2^0 + 2^2 + 2^4$
$a_6 = 42 = 2(4^0 + 4^1 + 4^2)$	$a_6 = 42 = 2^1 + 2^3 + 2^5$
...	...

理論整然としている様子が感覚的に理解でき、美しさが感じられないだろうか。

あとがき

チャイニーズリングは、小学生の頃に高校で数学を教えていた父親に与えられ夢中になって解いた覚えがある。大人になって、幾分ややこし目の作品を作る「からくり細工」職人となり、2進法や3進法を仕事との関連で使うようになった。ある時、ふと手に取ったパズルの本（「知恵の輪読本」秋山久義著）にチャイニーズリングの記述があり、その中にこんな数式が紹介されていた。

$$e(n) = e(n-1) + 2e(n-2) + 1(n \geq 3)$$

何のことかさっぱり分からなかった。（「漸化式Ⅲ」に出会うのはその後のことだ。）詳しく知りたいと思ったが、この本は数学の本ではなく、立ち入った計算は載っていないかった。「 $e(n)$ は関数だろうか？数列だろうか？」「この計算は自分の手に負えるものだろうか？」あれこれと考えながら、手持ちのパズルの本をめくったが、見つかるのは手数を表す式だけだった。

ウェブ上でも資料を探した。始めは、古典的名作ゆえに簡単に各種資料が見つかると思っていた。しかし結局、計算過程の資料は見つからなかった。そこで何人かの先輩のパズル家に相談すると、すぐにRouse.Ballの著書、松田道雄や高木茂男の論稿、そして江戸時代の和算家の研究の資料までもが手に入り、大変驚いた。自分の情報力だけなら、見つける事すら出来なかったと思う。

資料はどれも貴重なものだった。計算については、まずは松田道雄の論稿が最も参考になった。その理解の上で、英語だがより原典と思われるRouse.Ballの著書に手を伸ばした。どちらも古い資料だ。松田の論稿は70年前、Rouse.Ballの著書に至っては19世紀だ。しかしこれらの資料を読んで、ようやく知りたかったことにたどり着いた。「結局は原典まで遡るものだ」と痛感した。

後は夢中で計算した。漸化式を解くのは高校の時以来か？解法は今後皆様のご指導を頂きたい。また、数学に詳しい方は当然と思うかも知れないが、漸化式とは不思議なもので、極めて少なく見える情報から次々に数式が展開し、見事に解が導かれる。何度も驚かされた。逆に、もし漸化式を用いずに（等比数列の和も！）「法則」から手数を導けと言われたら、困るに違いない。

手数の式を導く計算については、恐らく実際は、本稿で紹介した研究者の後も色々な方が取り組んでおられると思う。しかし、いざその情報を探すとなかなか見つからない。これは驚きでもあり、少し残念でもあった。漸化式による解法は、個人的にとっても面白かったこともあり、その輪の動きの法則性ととも、もっと多くの場で（分かりやすく！）取り上げられたら、と思う。

本稿の試みから、このシンプルな知恵の輪がこれだけの数理を内包していることに改めて驚きを感じた。また、本稿で敢えて多用した漸化式は、現実の知恵の輪を元に行っている点でも、程よい（？）難易度の点でも、格好の学習・研究の材料になると思う。もちろん、受験生には限らずに。数式も知恵の輪も、もっと多くの人に「解けたら嬉しい」を感じてもらえれば、と思う。（以上）

発行 2018年9月20日 一部改定 2019年12月14日

参考

- 1872 Theoris du Baguenodier L.Gros
- 1892 "Mathematical Recreations and Essays" Rouse.Ball
- 1948 数学と数学遊戯・自由研究の数学 松田道雄
- 1973 数学史研究 日本におけるチャイニーズリング 高木茂男